

# Cálculo do sinal gravimétrico utilizando malhas hexaédricas

Ivaldevingles Rodrigues de Souza Junior, Cristiano Mendel Martins. Universidade Federal do Pará

Copyright 2022, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica.

Este texto foi preparado para a apresentação no IX Simpósio Brasileiro de Geofísica, Curitiba, 4 a 6 de outubro de 2022. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do IX SimBGF, mas não necessariamente representa a opinião da SBGf ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGf.

## Resumo

A modelagem numérica de campos físicos, sejam vetoriais ou escalares, é uma ferramenta importante para análise e compreensão dos métodos geofísicos. Na Gravimetria não é diferente, a modelagem permite estudar o sinal gravimétrico em diversas situações, simulando a execução de levantamentos. Neste contexto, é desejável continuamente pesquisar, diversificar e aperfeiçoar a modelagem gravimétrica. Este trabalho apresenta uma nova metodologia de modelagem gravimétrica para distribuições tridimensionais de massa, adequada mesmo para modelos em que a distribuição de densidade apresente geometria complexa. Resolvemos o cálculo numérico do sinal gravimétrico de um poliedro irregular, o que permite discretizar a subsuperfície com estes elementos e calcular a anomalia gravimétrica de modelos tridimensionais complexos.

## Introdução

A modelagem numérica do sinal gravimétrico de um corpo pode ser uma tarefa relativamente fácil se a forma dele for regular ou simétrica, como por exemplo, quando o corpo é esférico, cilíndrico ou prismático retangular; o sinal gravimétrico pode ser descrito analiticamente. Todavia, se a geometria for complexa essa tarefa se torna bem mais difícil. Nestes casos a modelagem pode ser realizada discretizando o corpo em vários prismas retangulares justapostos (Blakely, 1995), cujo sinal gravimétrico apresenta solução analítica (Plouff, 1975). Outra maneira de realizar esta tarefa é aplicar o método apresentado por Talwani & Ewing (1960), que calcula a anomalia gravimétrica de um corpo tridimensional dividindo-o em uma série de fatias horizontais sobrepostas e aproximando a forma de cada fatia por um prisma vertical de base poligonal (Kearey et al., 2013). Apresentamos uma nova metodologia para cálculo da anomalia gravimétrica de um corpo com geometria complexa discretizando-o em uma malha não estruturada composta por hexaedros irregulares com todas as faces quadrilaterais (note que o prisma retangular é um caso particular de hexaedro com faces quadrilaterais). O sinal gravimétrico de cada hexaedro é calculado realizando-se uma transformação de coordenadas e aplicando-se o quadratura de Gauss-Legendre a fim de simular a integração de volume de um prisma retangular.

## Metodologia

Dado um corpo de forma arbitrária com densidade  $\rho(x', y', z')$ , a componente vertical da gravidade ( $g_z$ ) em coordenadas cartesianas no ponto  $P(x, y, z)$  será determinado pela expressão a seguir (Blakely, 1995).

$$g_z(x, y, z) = \gamma \int \int \int_{x' y' z'} \rho(x', y', z') \frac{(z' - z)}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{\frac{3}{2}}} dV \quad (1)$$

onde  $\gamma$  é a constante gravitacional universal.

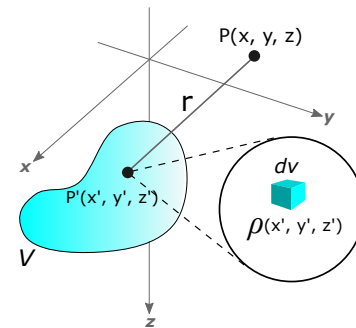


Figura 1 – Corpo com forma arbitrária e com densidade  $\rho(x', y', z')$ , dando destaque para o elemento de volume  $dv$ , sendo  $P(x, y, z)$  o ponto de observação. Fonte: modificado de Blakely (1995)

Neste trabalho, apresentamos uma nova maneira de solucionar numericamente a equação (1). A ideia consiste em resolver as integrais presentes nesta expressão realizando uma mudança do sistema de coordenadas em conjunto com a integração numérica por quadratura de Gauss-Legendre. Tal que, no novo sistema de coordenadas (sistema de coordenadas naturais  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ ) o hexaedro se torna um cubo centrado na origem do sistema e com lado igual a  $2u.c$  (Figura 2).

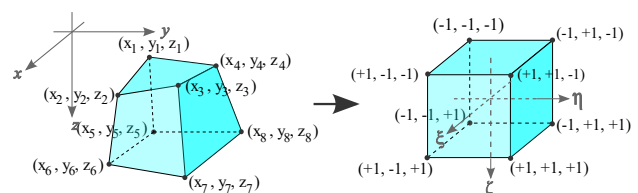


Figura 2 – Representação esquemática da mudança geométrica de um hexaedro irregular genérico (no sistema de coordenadas cartesianas), cujas faces são quadriláteros, após a transformação para o sistema de coordenadas naturais. Fonte: modificado de Neto et al. (2015).

A mudança de coordenada representada na figura 2 se baseia no conceito de "mapeamento isoparamétrico" aplicado no método dos elementos finitos isoparamétricos. Nesta técnica, utiliza-se funções de forma de Lagrange  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) (Szabó & Babuska, 2021) para obter  $x(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $y(\xi, \eta, \zeta)$  e  $z(\xi, \eta, \zeta)$  através de uma combinação linear com as coordenadas dos vértices do hexaedro irregular ( $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$ ). Logo as coordenadas  $x(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $y(\xi, \eta, \zeta)$  e  $z(\xi, \eta, \zeta)$  serão dadas por:

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_i \times x_i \quad (2)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_i \times y_i \quad (3)$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_i \times z_i \quad (4)$$

onde

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad N_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

sendo que  $\sum_{i=1}^8 N_i = 1$ .

Note que aplicando a regra da cadeia nas funções de forma obtêm-se as seguintes expressões:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$

As três equações anteriores formam um sistema de variáveis e, portanto, pode ser reescrito na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Considerando a matriz Jacobiana,  $\mathbf{J}$ , definida como uma matriz contendo as derivadas das coordenadas cartesianas em relação às coordenadas naturais (Neto et al., 2015), ou seja:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix},$$

então:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix}$$

O determinante de  $\mathbf{J}$  é um fator de escala (não constante) que relaciona o volume na geometria original a outro volume equivalente na geometria normalizada nas coordenadas naturais (Neto et al., 2015). De maneira que, a relação matemática entre os diferenciais é dada por:

$$dV = dx' dy' dz' = |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta, \quad (5)$$

Através das expressões (2), (3), (4) e (5); pode-se realizar uma transformação de coordenadas na integral tripla presente na equação (1). Para isto, primeiro é feita a seguinte simplificação (considerando que a densidade não varia dentro do hexaedro).

$$g_z(x, y, z) = \gamma \rho \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} f(x' - x, y' - y, z' - z) dV$$

onde:

$$f(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

então realizando a mudança de variáveis na integral tripla acima obtêm-se:

$$g_z = \gamma \rho \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x'(\xi, \eta, \zeta) - x, y'(\xi, \eta, \zeta) - y, z'(\xi, \eta, \zeta) - z) |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad (6)$$

Note que após a mudança de variáveis os limites de integração inferior e superior se tornaram, respectivamente,  $-1$  e  $+1$ . Isto permite solucionar numericamente a equação (6) utilizando quadratura de Gauss-Legendre. Para aplicar esta técnica as integrais são substituídas por somatórios e a expressão (6) é reescrita da seguinte maneira:

$$g_z(x, y, z) \approx \gamma \rho \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l f(\xi_i - x, \eta_j - y, \zeta_k - z) |\mathbf{J}| w_i w_j w_k$$

Onde  $w_i$ ,  $w_j$  e  $w_k$  são os pesos da quadratura e  $\xi_i$ ,  $\eta_j$  e  $\zeta_k$  são as abscissas. Os inteiros  $m$ ,  $n$  e  $l$  representam a quantidade de pontos da quadratura nas direções  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ ; respectivamente.

## Resultados

Para avaliar e validar o método proposto realizamos dois experimentos simples. No primeiro calculamos a anomalia gravimétrica produzida por um cubo com densidade igual a  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$  cuja aresta mede  $100 \text{ m}$  e o topo está situado a  $50 \text{ m}$  de profundidade (Figura 3a). Esta anomalia é obtida através da solução analítica apresentada por Plouff (1975). Em seguida dividimos esse cubo em sete hexaedros distintos (Figura 3b), sendo todas as faces desses poliedros compostas por quatro vértices. Os sinais produzidos individualmente por cada hexaedro são somados seguindo o princípio da superposição do sinal gravimétrico, obtendo-se assim uma anomalia para o cubo discretizado. Por fim, de posse das anomalias, uma obtida analiticamente e outra numericamente, podemos comparar as duas soluções.

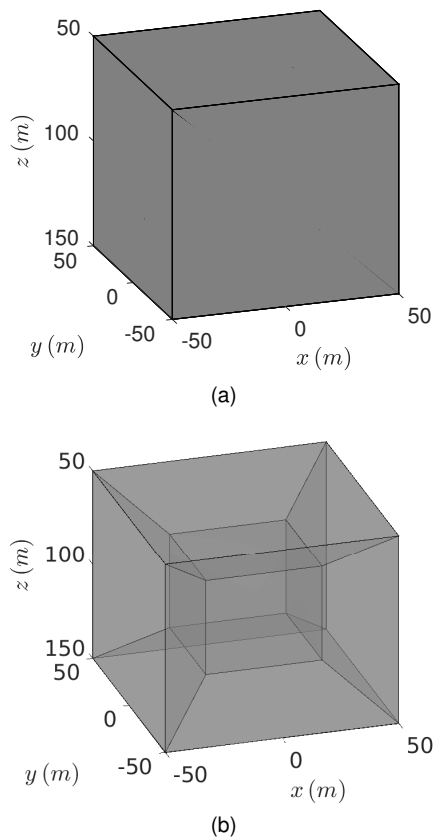


Figura 3 – (a) Corpo cúbico utilizado no primeiro experimento. (b) Cubo discretizado em sete hexaedros cujas faces são quadriláteros.

Os sinais calculados são apresentados na figura 4, onde é possível constatar a semelhança entre as duas anomalias (Figuras 4a e 4b). Para ajudar na comparação entre os dois sinais calculamos o erro relativo da solução obtida numericamente em relação à analítica (Figura 4c).

O valor máximo de erro relativo foi de  $0.06451\%$ . Este é um valor muito pequeno e confirma que as soluções são numericamente iguais, além de comprovar que o método aqui apresentado possui um alto grau de precisão.

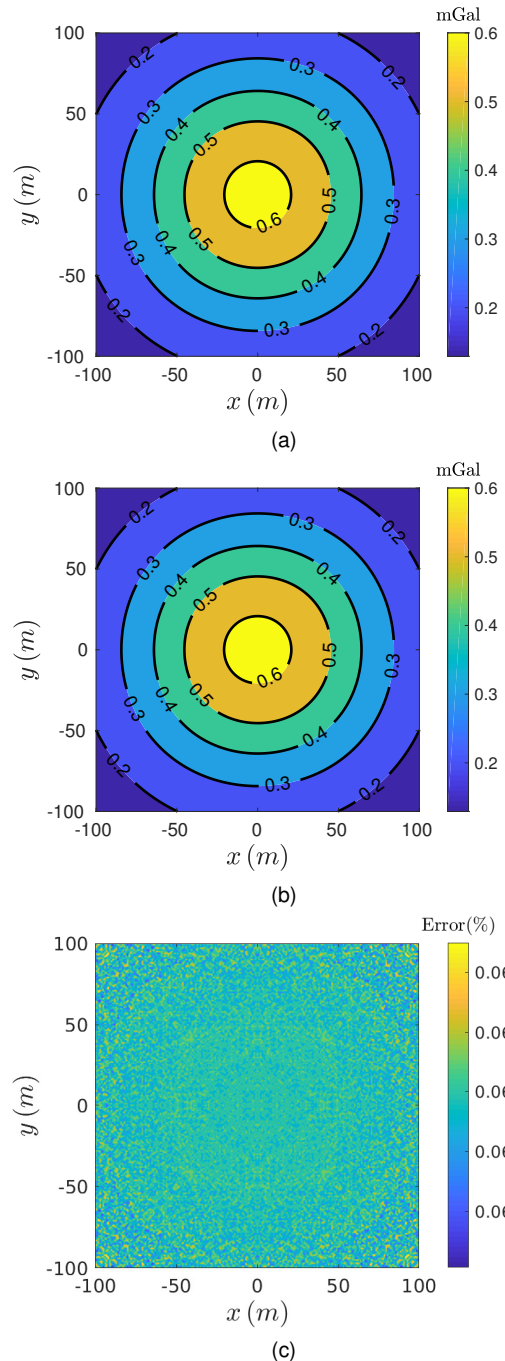


Figura 4 – Soluções obtidas no primeiro experimento: (a) sinal calculado analiticamente, (b) sinal calculado numericamente e (c) erro relativo da solução numérica em relação à analítica.

No segundo experimento calculamos a anomalia gravimétrica produzida por uma esfera de raio igual a  $50 \text{ m}$ , com centro nas coordenadas  $(0, 0, 100 \text{ m})$  e densidade  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ , de modo que esse sinal é obtido através da solução analítica fornecida por Telford et al. (1990). Em seguida discretizamos a esfera em uma malha hexaédrica e, semelhantemente ao experimento anterior,

a anomalia da esfera discretizada foi calculada somando os sinais produzidos individualmente por cada hexaedro.

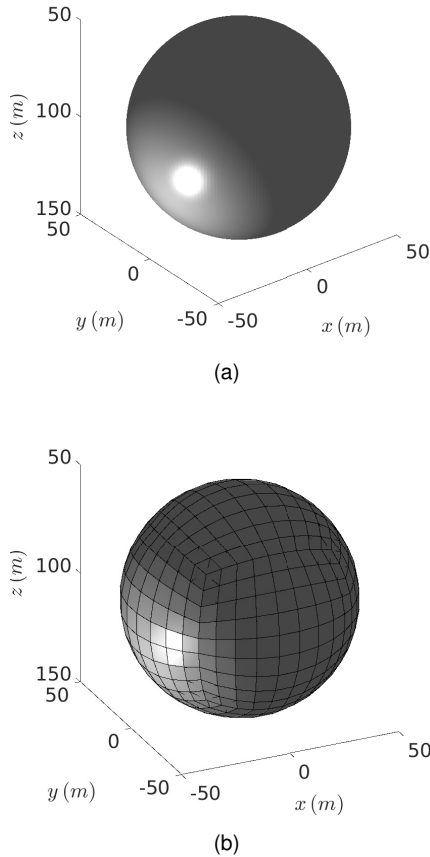


Figura 5 – (a) Corpo esférico utilizado no segundo experimento numérico. (b) Corpo esférico discretizado em uma malha hexaédrica.

As respostas calculadas estão mostradas na figura 6, onde se verifica a semelhança entre as duas anomalias (Figuras 6a e 6b). Novamente, para fins de comparação, realizou-se o cálculo do erro relativo da solução obtida numericamente em relação à analítica (Figura 6c).

Neste caso, o erro relativo máximo é de 1.341%, constatando numericamente que as duas soluções são muito próximas. De maneira que, essa pequena diferença entre as soluções possivelmente é provocada pela diferença de volume entre a esfera (Figura 5a) e o corpo obtido com a discretização da mesma (Figura 5b). Isso porque, através de testes (não mostrados) verificamos que quanto maior a discretização da esfera menor são os valores de erro, ou seja, o erro diminuiu quando aumentou a quantidade de hexaedros da malha. Deve-se também levar em consideração o erro gerado pelo método de integração numérica, o qual tem uma contribuição muito pequena para os valores de erro calculados.

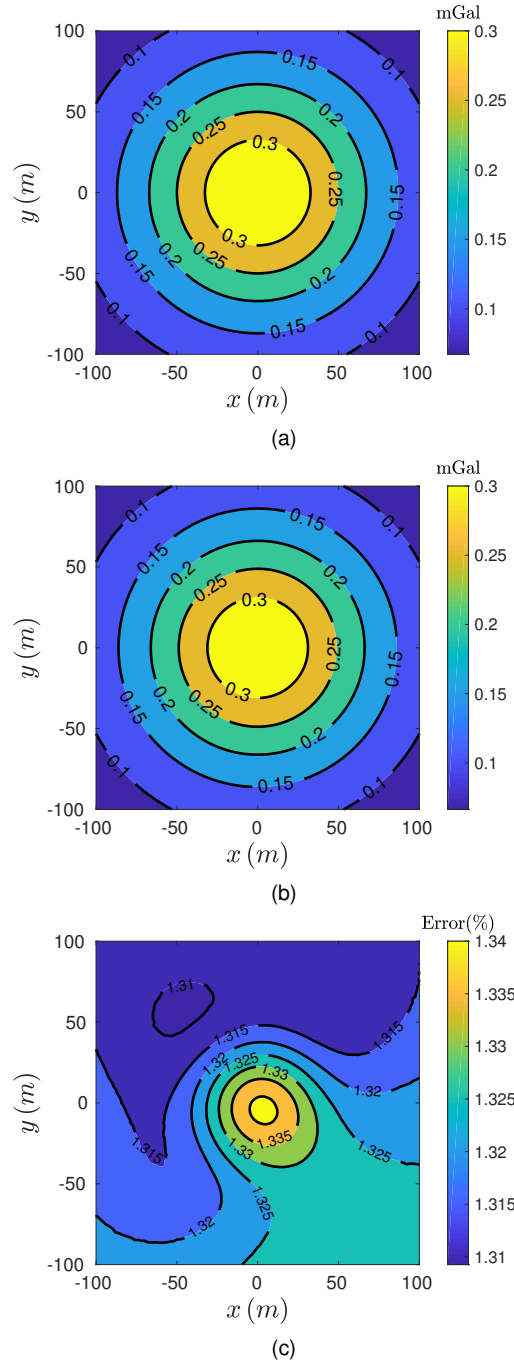


Figura 6 – Soluções obtidas no segundo experimento: (a) sinal calculado analiticamente, (b) sinal calculado numericamente e (c) erro relativo da solução numérica em relação à analítica.

### Discussão e Conclusões

Apresentamos um método com aproximações numéricas para calcular a anomalia gravimétrica de um corpo com geometria complexa discretizado em hexaedros de faces quadrilaterais irregulares que apresenta contaminação de erros numéricos muito pequenos. Ressaltamos que a

utilização de malhas não estruturadas para a discretização do corpo é uma grande vantagem dada a competência dela em se ajustar à geometrias complexas aumentando a acurácia da solução. Além disso, como existe uma grande quantidade de softwares que realizam a construção desse tipo de malha, a utilização desta técnica pode ser de fácil e ampla aplicação. Outras oportunidades de utilização desta técnica podem ser exploradas tanto em modelagem direta de métodos potenciais quanto para a estimação dos parâmetros geométricos e das propriedades físicas.

### **Agradecimentos**

Os autores agradecem o Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia Geofísica do Petróleo (INCT-GP), o Programa de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará e a Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas (FAPESPA) pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho.

### **Referências**

Blakely, R. J., 1995. *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*, Cambridge University Press, doi: 10.1017/CBO9780511549816.

Kearey, P., Brooks, M. & Hill, I., 2013. *An Introduction to Geophysical Exploration*, Wiley.

Neto, M. A., Amaro, A., Roseiro, L., Cirne, J. & Leal, R., 2015. *Engineering Computation of Structures: The Finite Element Method*, 1st ed., Springer Cham, doi: doi.org/10.1007/978-3-319-17710-6.

Plouff, D., 1975. *Derivation of formulas and fortran programs to compute gravity anomalies of prisms*, Final Report, 1973 - 1974 Geological Survey, Menlo Park, CA.

Szabó, B. & Babuska, I., 2021. *Finite Element Analysis: Method, Verification and Validation*, 2nd ed., Wiley.

Talwani, M. & Ewing, M., 1960. Rapid computation of gravitational attraction of three-dimensional bodies of arbitrary shape, *GEOPHYSICS*, vol. 25(1): 203–225, doi: 10.1190/1.1438687.

Telford, W. M., Geldart, L. P. & Sheriff, R. E., 1990. *Applied Geophysics*, 2nd ed., Cambridge University Press, doi: 10.1017/CBO9781139167932.