



Dez equações de tempo de trânsito: Parte 2

Yana Carolina Pinheiro Machado, Luma dos Santos Andrade, Aliane Gabrielle Campos Oliveira, Adriano Pinheiro Leite Filho e Andrey Marcos Souza da Silva de Lima, UFPA, Brasil.

Copyright 2022, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

Este texto foi preparado para a apresentação no IX Simpósio Brasileiro de Geofísica, Curitiba, 04 a 06 de outubro de 2022. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do IX SimBGf, mas não necessariamente representa a opinião da SBGf ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGf.

Resumo

O cálculo do tempo de trânsito é de grande importância para o processamento e imageamento sísmico. Neste trabalho, reunimos e revisamos as derivações de dez equações de tempo de trânsito e dividimos em dois resumos. A parte 1 contém os cálculos dos tempos de trânsito para: ondas diretas, ondas refletidas em um meio plano paralelo e com inclinação, múltiplas de primeira ordem em um meio plano paralelo e com inclinação, ondas convertidas P-SV e SV-P. Na parte 2, segundo resumo, calculamos os tempos de trânsito para: ondas refratadas em um meio plano paralelo e com inclinação, ondas difratadas em dois casos, e para um meio heterogêneo 1D.

Introdução

O cálculo do tempo de trânsito nos métodos sísmicos é de fundamental importância no desenvolvimento de algoritmos de imageamento sísmico e tomografia sísmica. Em meios complexos, esse desafio precisa de um tratamento mais robusto usando diferenças finitas como em Vidale (1990) ou aproximação de alta frequência usando o sistema de traçamento de raios como em Cervený (2001) e Costa (2002).

É fundamental que o aluno de graduação em geofísica que deseja aprofundar seus conhecimentos em métodos sísmicos domine os cálculos dos tempos de trânsito de geometrias simples para modelos homogêneos e isotrópicos. Nas principais referências de introdução à sísmica e sismologia (Ikelle e Amundsen, 2018; Stein e Wysession, 2003; Sheriff e Geldart, 2012; Shearer, 2019; Telford et al., 1976; Chapman, 2004), é possível encontrar parte das manipulações e aplicações das equações de tempo de trânsito para meios simples.

Nesse trabalho, revisamos dez principais equações de tempo de trânsito divididos em dois resumos. A parte 1 contém os cálculos de tempo de trânsito para: ondas diretas, ondas refletidas em um meio plano paralelo e com inclinação, múltiplas de primeira ordem em um meio plano paralelo e com inclinação, ondas convertidas P-SV e SV-P. Na parte 2, segundo resumo, calculamos os tempos de trânsito para: ondas refratadas em um meio plano paralelo e com inclinação, ondas difratadas em dois casos, e para um meio heterogêneo 1D.

O conhecimento dessas equações de tempo de trânsito, ajudam no entendimento de técnicas de imageamento e interpretação sísmica. Em Yilmaz (2001), por exemplo, esse conhecimento é útil em várias etapas do processamento sísmico. Assim, o objetivo dos dois

trabalhos, parte 1 e parte 2, é familiarizar o aluno de graduação com as derivações desses dez tempos de trânsito para o melhor entendimento de técnicas mais avançadas de manipulações de dados sísmicos. Todas as figuras estão disponíveis nesse slide ([clique aqui](#)) em formato .pptx para que seja usado no ensino de graduação em geofísica nas disciplinas de sísmica.

Metodologia

Para o cálculo do tempo de trânsito nos dois resumos foi utilizada majoritariamente a metodologia a seguir:

- 1) Definir um modelo de duas camadas homogêneas e isotrópicas com velocidades v_1 e v_2 . A profundidade do refletor é dada por z .
- 2) Definir x sendo o afastamento entre fonte e receptor. A fonte é representada por uma estrela vermelha e o receptor é representada por um triângulo azul.
- 3) Aplicar a ideia de ponto imagem onde o refletor é interpretado como um espelho e a fonte pode então ser projetada a uma localização equidistante facilitando o cálculo da trajetória do raio no caso de múltiplas reflexões.
- 4) Calcular a trajetória total do raio usando trigonometria. O cálculo do tempo de trânsito pode ser encontrado usando a equação geral:

$$\text{tempo de trânsito} = \frac{\text{trajetória total do raio}}{\text{velocidade do meio}}$$

A seguir apresentamos os resultados para esta parte do trabalho.

Resultados

1) Tempo de trânsito da onda refratada para um refletor plano paralelo.

Refrações são eventos que ocorrem após a trajetória do raio atingir o ângulo crítico θ_c . A refração crítica ocorre somente se a velocidade do meio de baixo for maior que a de cima, isto é $v_2 > v_1$. Na Figura 1, o tempo de trânsito depende do conhecimento das trajetórias dos raios a , b e c . Assim o tempo total é dado por:

$$T_{\text{refração}} = T_a + T_b + T_c$$

Usando trigonometria e o fato que o ângulo de saída da onda refratada deve ser igual ao ângulo de entrada θ_c , encontramos que T_a e T_c são

$$T_a = T_c = \frac{a}{v_1} = \frac{c}{v_1} = \frac{z}{v_1 \cdot \cos \theta_c} \quad (1)$$

Então, $T_a + T_c = \frac{2z}{v_1 \cdot \cos \theta_c}$. O tempo T_b pode ser encontrado usando a profundidade z , o ângulo crítico θ_c e a velocidade do meio de baixo v_2 :

$$T_b = \frac{b}{v_2} = \frac{x - 2 \cdot z \cdot \text{tg} \theta_c}{v_2} \quad (2)$$

Assim, o tempo de trânsito da onda refratada é dado por:

$$T_{\text{refração}} = T_a + T_b + T_c = \frac{2 \cdot z}{v_1 \cdot \cos \theta_c} + \frac{x - 2 \cdot z \cdot \text{tg} \theta_c}{v_2} \quad (3)$$

No processamento convencional de dados sísmicos, os eventos de refração são geralmente removidos do sismograma. No entanto, no caso da sísmica de refração, onde esse evento é o ator principal, é possível estimar propriedades da região rasa da Terra.

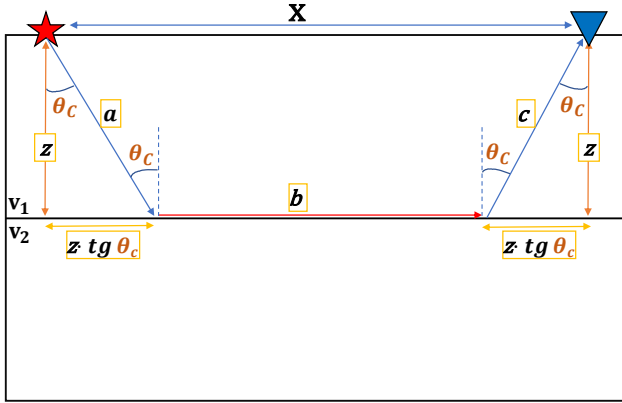


Figura 1 – Esquema para cálculo do tempo de trânsito da onda refratada no caso de um evento plano paralelo. Perceba que a onda se propaga na trajetória b com velocidade v_2 .

2) Tempo de trânsito da onda refratada para um refletor plano com inclinação α

Nesse caso representado pela Figura 2, o tempo de trânsito depende do conhecimento das trajetórias dos raios a, b e c onde o tempo de trânsito total é dado por:

$$T_{\text{refração}} = T_a + T_b + T_c$$

Para resolver esse problema, usamos trigonometria básica para encontrar as expressões a partir da Figura 2. Incentivamos o leitor a fazer o exercício e encontrar todas as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \cos \theta_c &= \frac{z_d}{AB} \quad \therefore \quad AB = \frac{z_d}{\cos \theta_c} \\ \cos \theta_c &= \frac{z_u}{CD} \quad \therefore \quad CD = \frac{z_u}{\cos \theta_c} \\ \text{sen} \alpha &= \frac{AE}{x} \quad \therefore \quad AE = x \cdot \text{sen} \alpha \\ \tan \theta_c &= \frac{GD}{Z_u} \quad \therefore \quad GD = z_u \cdot \tan \theta_c \\ z_u &= z_d - AE = z_d - x \cdot \text{sen} \alpha \\ CD &= \frac{z_u}{\cos \theta_c} = \frac{z_d - x \cdot \text{sen} \alpha}{\cos \theta_c} \\ \cos \alpha &= \frac{ED}{x} \quad \therefore \quad ED = x \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\tan \theta_c = \frac{FB}{Z_d} \quad \therefore \quad FB = z_d \cdot \tan \theta_c$$

$$\tan \theta_c = \frac{GD}{Z_u} \quad \therefore \quad GD = z_u \cdot \tan \theta_c = (z_d - x \cdot \text{sen} \alpha) \cdot \tan \theta_c$$

$$BC = ED - FB - GD$$

Todas as expressões acima são usadas para calcular o tempo de trânsito total que é dado por:

$$T_{\text{refração}} = T_a + T_b + T_c = \frac{AB}{v_1} + \frac{BC}{v_2} + \frac{CD}{v_1} = \frac{z_d}{v_1 \cdot \cos \theta_c} + \frac{x \cdot \cos \alpha - z_d \cdot \tan \theta_c - (z_d - x \cdot \text{sen} \alpha) \tan \theta_c}{v_2} + \frac{z_d - x \cdot \text{sen} \alpha}{v_1 \cdot \cos \theta_c} \quad (4)$$

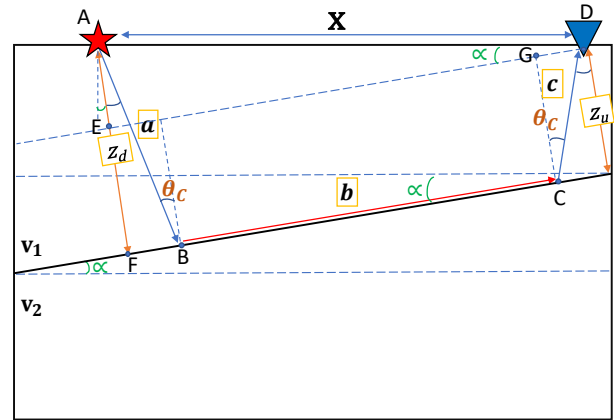
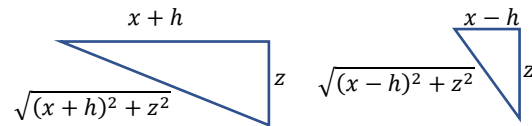


Figura 2 – Cálculo do tempo de trânsito para um evento de refração para um refletor plano com inclinação α .

3) Tempo de trânsito para um evento difrator que não está localizado entre fonte e receptor.

Um refletor pode ser interpretado como infinitos difratores arranjados lado a lado. Essa ideia ajuda no entendimento do algoritmo de migração Kirchhoff, por exemplo. Nos próximos dois tópicos, é derivado o tempo de trânsito para difrações em dois casos distintos que gera resultados similares.

Na Figura 3, a análise do problema requer o desenho de dois triângulos:



O objetivo é encontrar o tempo de trânsito da fonte ao ponto difrator T_s e o tempo de trânsito do ponto difrator ao receptor T_r . Se usarmos a soma dos tempos individuais T_s e T_r , encontramos o tempo de trânsito total para um ponto difrator:

$$T_{\text{difração}} = T_s + T_r$$

$$T_{\text{difração}} = \left(\frac{\sqrt{(x+h)^2 + z^2}}{v} \right) + \left(\frac{\sqrt{(x-h)^2 + z^2}}{v} \right) \quad (5)$$

Se substituirmos $z = \frac{v \cdot T_0}{2}$ na expressão acima, onde T_0 é o tempo para o afastamento nulo, temos

$$T_d = \left(\frac{\sqrt{(x+h)^2 + \left(\frac{v \cdot T_0}{2}\right)^2}}{v} \right) + \left(\frac{\sqrt{(x-h)^2 + \left(\frac{v \cdot T_0}{2}\right)^2}}{v} \right) \quad (6)$$

Colocando a velocidade v do denominador pra dentro da raiz temos

$$T_d = \sqrt{\frac{(x+h)^2}{v^2} + \frac{T_0^2}{4}} + \sqrt{\frac{(x-h)^2}{v^2} + \frac{T_0^2}{4}} \quad (7)$$

Essa é a famosa expressão da raiz dupla para difratores ou Double Square Root Equation (DSR), muito utilizada do imageamento sísmico e nos estudos mais complexos utilizando difrações como em [Klem et. al. \(2016a, 2016b\)](#).

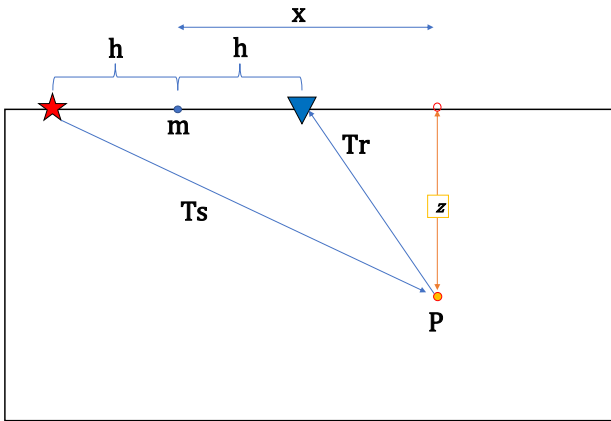
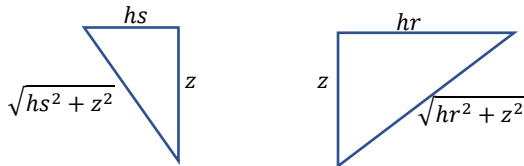


Figura 3 – Ilustração para o cálculo do tempo de trânsito da onda difratada em um meio com velocidade v quando o ponto difrator não está entre a fonte e o receptor.

4) Tempo de trânsito para um evento difrator localizado entre fonte e receptor

Na Figura 4, o ponto difrator está localizado entre a fonte e o receptor. Os dois triângulos que precisamos desenhar neste segundo caso estão representados a seguir:



Assim podemos calcular o tempo de trânsito da seguinte maneira

$$T_{\text{difração}} = T_s + T_r$$

$$T_{\text{difração}} = \left(\frac{\sqrt{hs^2 + z^2}}{v} \right) + \left(\frac{\sqrt{hr^2 + z^2}}{v} \right) \quad (8)$$

Se substituirmos $z = \frac{v \cdot T_0}{2}$ teremos

$$T_d = \left(\frac{\sqrt{hs^2 + \left(\frac{v \cdot T_0}{2}\right)^2}}{v} \right) + \left(\frac{\sqrt{hr^2 + \left(\frac{v \cdot T_0}{2}\right)^2}}{v} \right) \quad (9)$$

Colocando a velocidade v do denominador pra dentro da raiz temos:

$$T_D = \sqrt{\frac{hs^2}{v^2} + \frac{T_0^2}{4}} + \sqrt{\frac{hr^2}{v^2} + \frac{T_0^2}{4}} \quad (10)$$

Essa seria uma outra maneira de escrever a DSR. As equações (7) e (10) se tornam equivalentes se substituirmos $hs = x + h$ e $hr = x - h$.

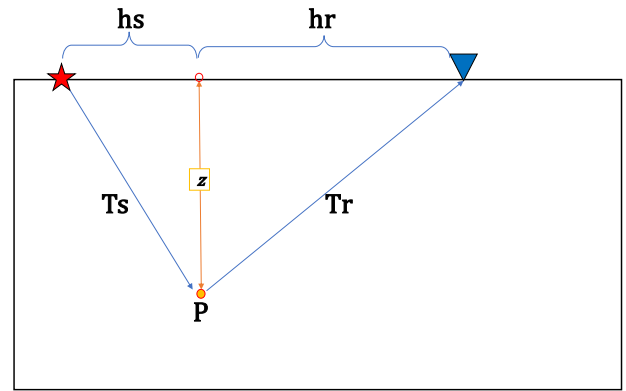


Figura 4 – Esquema para cálculo do tempo de trânsito da difração em um meio com velocidade v quando o ponto difrator está localizado entre fonte e receptor.

5) Tempo de trânsito para um modelo com gradiente linear de velocidade dado por $v = v_0 + az$.

Vamos agora resolver um problema muito útil na inversão de dados sísmicos e traçamento de raios em meios heterogêneos que é estimar o tempo de trânsito e o afastamento total para raios em meios com gradiente de velocidade linear $v(z) = v_0 + az$. Onde conhecemos a velocidade $v_0 = 1500 \text{ m/s}$, o coeficiente angular a e a vagarosidade $p = 1/v_j$. [Krebs \(2019\)](#) utiliza o zoom na Figura 5 para obter as seguintes expressões:

$$\cos\theta_j = \frac{h_j}{l_j} \quad \therefore \quad l_j = \frac{h_j}{\cos\theta_j}$$

$$\text{sen}\theta_j = \frac{x_j}{l_j} \quad \therefore \quad x_j = l_j \cdot \text{sen}\theta_j$$

$$\tan\theta_j = \frac{x_j}{h_j} \quad \therefore \quad x_j = h_j \cdot \tan\theta_j$$

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\theta_2}{v_2} = \frac{\text{sen}\theta_j}{v_j} = p \quad \therefore \quad \text{sen}\theta_j = p \cdot v_j$$

$$\cos\theta_j^2 + \text{sen}\theta_j^2 = 1$$

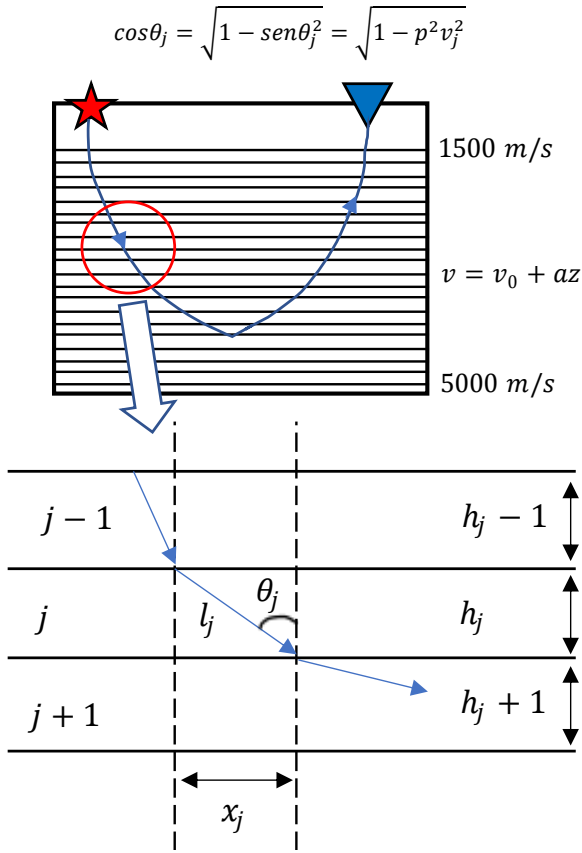


Figura 5 – Modelo da subsuperfície com gradiente linear de velocidade $v(z) = v_0 + az$. Cada camada pode ser discretizada e o problema linearizado. Onde l_j é o tamanho do arco. Adaptado de Krebs (2019).

Podemos agora escrever a expressão para o tempo de trânsito total de descida e subida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 t &= 2 \sum_{j=1}^n \frac{l_j}{v_j} = 2 \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{v_j \cos \theta_j} \\
 &= 2 \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{v_j \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_j}} \\
 &= 2 \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{v_j \sqrt{1 - p^2 v_j^2}} \quad (11)
 \end{aligned}$$

Agora calculamos o afastamento total x usando a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 x &= 2 \sum_{j=1}^n x_j = 2 \sum_{j=1}^n h_j \tan \theta_j \\
 &= 2 \sum_{j=1}^n h_j \frac{\text{sen} \theta_j}{\cos \theta_j} \\
 &= 2 \sum_{j=1}^n h_j \frac{p \cdot v_j}{\sqrt{1 - p^2 v_j^2}} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Precisamos sair do domínio discreto e ir para o domínio contínuo. Isso é feito assumindo que h_j é muito pequeno e tende para um valor dz . É assumido também que a profundidade máxima até o momento que o raio retorna é Z_{max} . Com isso, t é dado pela seguinte expressão:

$$t = 2 \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{v_j \sqrt{1 - p^2 v_j^2}} \quad (13)$$

$$t = 2 \int_0^{Z_{max}} \frac{dz}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}} \quad (14)$$

Multiplicamos em cima e em baixo a equação (14) por $p \cdot a$ e obtemos

$$t = 2 \int_0^{Z_{max}} \frac{p \cdot a \cdot dz}{p \cdot a \cdot v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}} \quad (15)$$

Agora precisamos reescrever a integral acima em uma integral mais simples de resolver. Para isso, mudamos os limites de integração

$$y = p \cdot v(z) = p \cdot (v_0 + a \cdot z) = p \cdot v_0 + p \cdot a \cdot z$$

$$dy = p \cdot a \cdot dz \quad \therefore \quad dz = \frac{dy}{p \cdot a}$$

$$\text{Se } z = 0, \quad y = p \cdot v_0$$

$$\text{Se } z = z_{max}, \quad y = p \cdot v(z_{max}) = p \cdot v(z)$$

Assim podemos reescrever a integral da equação (15) da seguinte maneira

$$t = \frac{2}{a} \int_{p \cdot v_0}^{p \cdot v(z)} \frac{dy}{y \sqrt{1 - y^2}} \quad (16)$$

Essa integral tem solução conhecida na forma

$$t = \frac{-2}{a} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \right) \Big|_{p \cdot v_0}^{p \cdot v(z)} \quad (17)$$

Substituindo y e os limites de integração na equação (17) para voltarmos a integral original temos

$$t = \frac{2}{a} \log \left(\frac{v(z)}{v_0} \frac{1 + \sqrt{1 - p^2 v_0^2}}{1 + \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}} \right) \quad (18)$$

Essa é a expressão do tempo de trânsito para um meio com gradiente de velocidade $v(z) = v_0 + az$.

Usando a Figura 5, faremos o mesmo procedimento para encontrarmos o afastamento total que será dado por:

$$x = 2 \sum_{j=1}^n h_j \frac{p \cdot v_j}{\sqrt{1 - p^2 v_j^2}} \quad (19)$$

Assumindo que $h_j \rightarrow dz$ podemos reescrever o somatório

$$x = 2 \int_0^{Z_{max}} \frac{p \cdot v(z) \cdot dz}{\sqrt{1 - p^2 v(z)^2}} \quad (20)$$

Precisamos mudar os limites de integração novamente para reescrever a integral acima

$$w = p \cdot v(z) = p \cdot (v_0 + a \cdot z) = p \cdot v_0 + p \cdot a \cdot z$$

$$dw = p \cdot a \cdot dz \quad \therefore \quad dz = \frac{dw}{p \cdot a}$$

$$\text{Se } z = 0, \quad w = p \cdot v_0$$

$$\text{Se } z = z_{\max}, \quad w = p \cdot v(z_{\max}) = p \cdot v(z)$$

Com estas substituições acima teremos uma integral com solução conhecida do tipo

$$x = \frac{1}{p \cdot a} \int_{p \cdot v_0}^{p \cdot v(z)} \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} \quad (21)$$

A solução da integral na equação (21) tem o seguinte formato

$$x = \frac{-1}{p \cdot a} \sqrt{1 - w^2} \frac{p \cdot v(z)}{p \cdot v_0} \quad (22)$$

Se substituirmos $v(z) = v_0 + az$ nos limites de integração e w temos

$$x = \frac{1}{p \cdot a} \left[\sqrt{1 - p^2 v_0^2} - \sqrt{1 - p^2 v(z)^2} \right] \quad (23)$$

As equações (18) e (23) são utilizadas para traçamento de raios em meios heterogêneos. O problema direto consiste em dado um modelo de velocidade v e a profundidade z encontrar t e x . Ainda em [Krebes \(2019\)](#) ou em [Aki e Richards \(2002\)](#), é possível encontrar o problema inverso, onde a partir de t , x e o parâmetro do raio p estimamos a profundidade z e a velocidade v . Esse problema é resolvido usando o método de Wiechert-Herglotz.

Discussão e Conclusões

Este trabalho resumiu e apresentou as dez equações de tempo de trânsito mais frequentes no estudo da sísmica durante o período de graduação em geofísica. Os tempos de trânsito apresentados nas duas partes desse trabalho são de fundamental importância para o entendimento de conceitos mais complexos como traçamento de raios, imageamento sísmico, tomografia sísmica e eliminação de múltiplas. Todas as imagens deste trabalho ficarão disponíveis nesse slide ([clique aqui](#)) para que seja utilizado no ensino de graduação em geofísica nos cursos de sísmica.

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Federal do Pará pelo suporte e estrutura e ao PET geofísica da UFPA pelo tempo disponibilizado para que esse trabalho fosse feito.

Referências

Aki, Keiiti, and Paul G. Richards. *Quantitative seismology*. 2002.

Cerveny, V., 2001. *Seismic Ray Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Chapman, C.H., 2004. *Fundamentals of Seismic Wave Propagation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Costa, Jessé; Schoenberg, Michael; Urban, Jaime. 3D raytracing through homogeneous anisotropic media with smooth interfaces. *Revista Brasileira de Geofísica*, v. 20, n. 3, p. 171-179, 2002.

Ikelle, L. T. and Amundsen, L., 2018. *Introduction to Petroleum Seismology*, 2nd edition. Society of Exploration Geophysicists, pp. 73-142. doi:10.1190/1.9781560803447

Klem-Musatov, K., Hoerber, H.C., Moser, T.J., and Pelissier, M.A. (2016a). *Classical and Modern Diffraction Theory*. Geophysics Reprint Series No. 29. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists.

Klem-Musatov, K., Hoerber, H.C., Moser, T.J., and Pelissier, M.A. (2016b). *Seismic Diffraction*. Geophysics Reprint Series No. 30. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists.

Krebes, E., 2019. *Seismic Wave Theory*. Cambridge: Cambridge University Press. pp. 187-229. doi:10.1017/9781108601740.006

Sheriff, Robert E., and Lloyd P. Geldart, 2012. *Exploration Seismology*. Cambridge university press, pp. 73-84. doi: 10.1017/CBO9781139168359.

Shearer, P. M., 2019. *Introduction to Seismology*, 3rd edition. Cambridge University Press, pp. 159-185. doi:10.1017/9781316877111.

Stein, S. and Wysession, M., 2003. *An Introduction to Seismology, Earthquakes, and Earth Structure*. Oxford: Blackwell Publishing, pp. 132-170.

Telford, W.M., Geldart, L.P., Sheriff, R.E., and Keys, D.A. (1976). *Applied Geophysics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Vidale, J. E., 1990. Finite-difference calculation of traveltimes in three dimensions: *Geophysics*, 55, no. 5, 521–526. doi: 10.1190/1.1442863.

Yilmaz, Öz, 2001. *Seismic data analysis: Processing, inversion, and interpretation of seismic data*. Society of exploration geophysicists.