



Estudo de sensibilidade da solução numérica do problema de propagação da onda no domínio da frequência em relação aos parâmetros das camadas de absorção do tipo Perfectly Matched Layers

Fernandes, G. R.; Bautista, K. D. T.; Peters, F. C.; Mansur, W. J., Programa de Engenharia Civil/Coppe/UFRJ, LAMEMO-Laboratório de Métodos de Modelagem e Geofísica Computacional

Copyright 2018, SBGF - Sociedade Brasileira de Geofísica

Este texto foi preparado para a apresentação no VIII Simpósio Brasileiro de Geofísica, Salinópolis, 18 a 20 de setembro de 2018. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do VIII SimBGf, mas não necessariamente representa a opinião da SBGF ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGF.

Resumo

A solução numérica da Equação de Helmholtz em domínio semi-infinito é bastante utilizada em diversas aplicações da geofísica computacional e precisa ter acurácia satisfatória, sendo esta dependente do nível de discretização espacial do domínio, ordem de aproximação do método numérico empregado e da modelagem das condições de contorno não reflexivas, que por sua vez, dependem da implementação de camadas de absorção para atenuar reflexões de borda. Neste trabalho, a técnica conhecida como Perfectly Matched Layers é empregada e o resultado depende da determinação prévia de alguns parâmetros. O objetivo do trabalho é avaliar o impacto destes parâmetros sobre a solução numérica de modo a possibilitar um emprego seguro da técnica. Para isso, soluções numéricas da Equação de Helmholtz em domínios semi-infinitos e homogêneos foram comparadas com soluções analíticas de modo que se pudesse determinar faixa de valores ótimos para tais parâmetros em função da velocidade de propagação e da frequência empregada.

Introdução

São muitos os problemas que dependem da solução numérica do problema de propagação da onda acústica (Marelli et al., 2012) no domínio da frequência. Um destes problemas é a inversão do campo de onda completo, também conhecido na literatura como Full Waveform Inversion – FWI (Abubakar et al., 2009; Aster et al., 2005) além de tomografias e migrações (Yilmaz, 1987). Sabe-se que a solução da FWI com abordagem multiescala (Bunks et al., 1995) tem inúmeras vantagens e depende da solução numérica da Equação de Helmholtz em domínio semi-infinito a cada nova iteração da inversão (Fichtner et al., 2011; Virieux et al., 2009). Neste caso, a solução numérica precisa ter acurácia satisfatória, sendo esta dependente do nível de discretização espacial do domínio, ordem de aproximação do método numérico empregado e da modelagem das condições de contorno não reflexivas, que por sua vez, dependem da implementação de camadas de absorção para atenuar reflexões de borda. Existem diversos modelos matemáticos para as camadas de absorção (Cerjan, et al., 1985; Clayton et al., 1977), mas o modelo conhecido

como Perfectly Matched Layers (Berenger et al., 1994) é um dos mais empregados (Komatitach et al., 2003; Liu et al., 1997; Zeng et al., 2001). Tal modelo apresenta resultados satisfatórios, entretanto, depende da determinação prévia de alguns parâmetros: espessura da camada de absorção e variação espacial da absorção a partir da borda do domínio, ambos determinados empiricamente. O objetivo do presente trabalho é avaliar o impacto dos parâmetros das camadas de absorção sobre a solução numérica de modo a possibilitar um emprego seguro da técnica em problemas de inversão. Neste contexto, cabe ainda destacar que a modelagem numérica é utilizada também no cálculo do gradiente da função objetivo (Plessix et al., 2006), o que torna o estudo ainda mais relevante. Para isso, soluções numéricas da Equação de Helmholtz em domínios semi-infinitos e homogêneos foram comparadas com soluções analíticas de modo que se pudesse determinar uma faixa de valores ótimos para tais parâmetros.

Metodologia

O objetivo do presente trabalho é apresentar resultados referentes ao comportamento da solução numérica da Equação de Helmholtz em domínio semi-infinito empregando diferenças finitas e camadas de absorção do tipo PML com diferentes valores para o parâmetro C_{pml} e também camadas de diferentes espessuras. Para avaliação dos resultados numéricos, o erro médio em todos os pontos da malha foi calculado em relação à solução analítica, uma vez que os experimentos foram realizados em domínios homogêneos com velocidades de propagação de 1500m/s, 3000m/s e 4500m/s. A dimensão do modelo é de 1000m de profundidade por 2000m de largura e o erro médio da solução foi calculado dentro desta região, desconsiderando o erro na região das camadas de absorção presentes no domínio estendido.

A solução numérica foi obtida utilizando o esquema de segunda ordem de diferenças finitas apresentado por Hustedt et al., 2004. A equação de cada nó é dada por

$$c_1 u_{i,j} + c_2 u_{i-1,j} + c_3 u_{i+1,j} + c_4 u_{i,j-1} + c_5 u_{i,j+1} = f_{i,j}$$

onde

$$c_2 = \frac{1}{\xi_{i,j} \Delta^2 \xi_{i,j} + \xi_{i-1,j}}; c_3 = \frac{1}{\xi_{i,j} \Delta^2 \xi_{i,j} + \xi_{i+1,j}};$$

$$c_4 = \frac{1}{\xi_{i,j} \Delta^2 \xi_{i,j} + \xi_{i,j-1}}; c_5 = \frac{1}{\xi_{i,j} \Delta^2 \xi_{i,j} + \xi_{i,j+1}};$$

$$c_1 = \frac{\omega^2}{K_{i,j}} - c_2 - c_3 - c_4 - c_5;$$

com $\xi = 1$ para nós no interior do modelo e

$$\xi = 1 + C_{PML} \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right),$$

onde p é a posição relativa do nó dentro de uma camada de absorção, tomando a borda externa como origem.

Com relação às condições de contorno, foram empregadas superfície livre na borda superior e condições não-reflexivas nas demais bordas (Reynolds, 1978). O sistema de equações algébricas resultante foi resolvido com fatoração LU (Demmel, 1997, Li et al., 2003). Tal procedimento de modelagem já foi empregado e apresentado em trabalhos anteriores (Peters et al., 2017 e 2015).

Resultados

A Figura 1 apresenta a solução analítica da equação de Helmholtz (a) e a solução numérica empregando camadas de absorção (b). É possível notar o efeito das camadas de absorção na região estendida do modelo.

Na primeira etapa dos experimentos, buscou-se determinar o tamanho ótimo das camadas de absorção. Verificou-se que, quanto mais espessa a camada, menor o erro médio da solução, mantidos os demais parâmetros fixados, conforme esperado. Assim, ficou estabelecido que camadas PML de 100 pontos fossem usadas nos demais experimentos.

Na sequência, passou-se a investigar o comportamento da solução com relação ao parâmetro C_{pml} , que indica a taxa de absorção dentro da região estendida do modelo. Para tal, experimentos em meios com velocidades de propagação de 1500m/s, 3000m/s e 4500m/s e frequências de 8 a 16Hz foram realizados, de modo a cobrir o intervalo de comprimentos de onda empregado em aplicações como inversão de dados sísmicos. Inicialmente, empregou-se uma malha de 2,5m de espaçamento em todos os experimentos e a Figura 2 apresenta o erro médio de todos estes resultados.

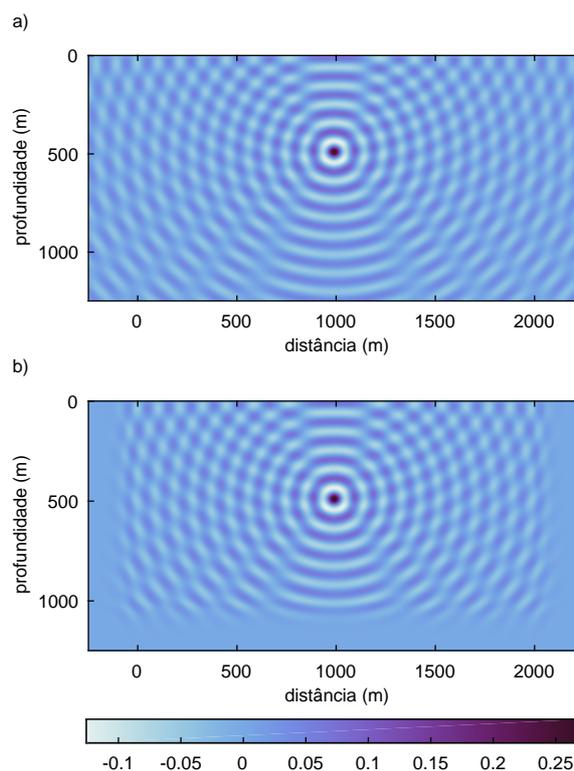


Figura 1 – Solução da Equação de Helmholtz no semi-espaço: (a) analítica; (b) numérica com PML.

Sabe-se que o erro da solução numérica é também dependente do espaçamento da malha. Por esta razão, todos os experimentos relatados anteriormente foram repetidos em malha com espaçamento de apenas 1,0m com o objetivo de verificar a redução do erro em relação aos experimentos anteriores (devido ao refinamento da malha) e investigar se o comportamento da solução seria o mesmo para diferentes valores de C_{pml} , agora em malha mais refinada. A Figura 3 apresenta estes resultados.

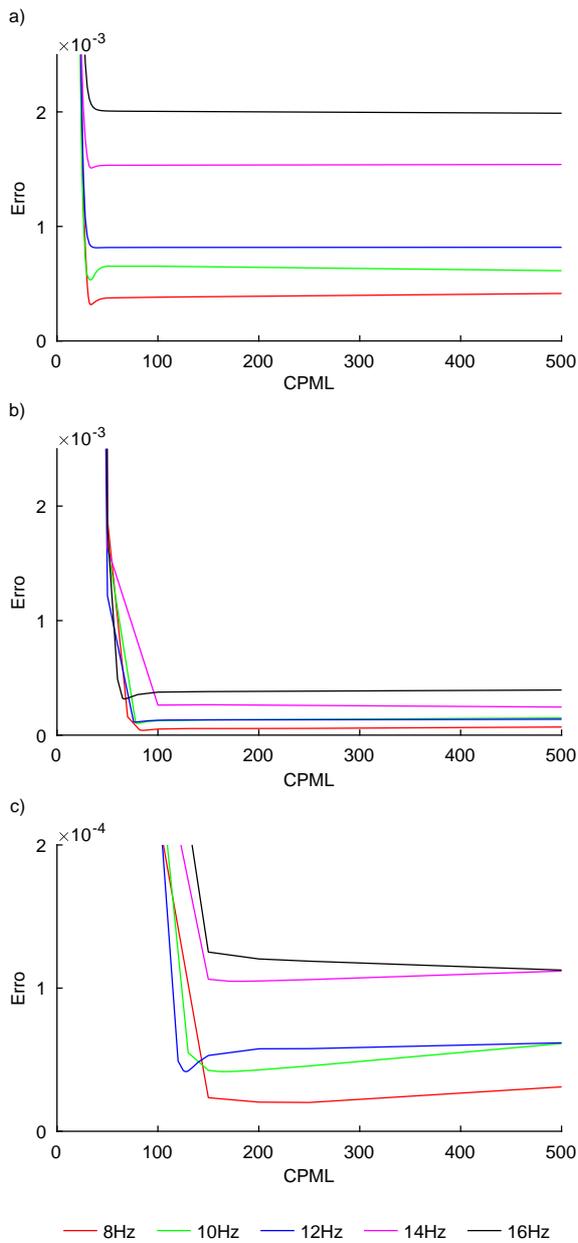


Figura 2 – Erro médio da solução para frequências entre 8 e 16Hz para espaçamento de malha de 2,5m e camadas de 100 pontos: (a)1500m/s, (b)300m/s e (c) 4500 m/s.

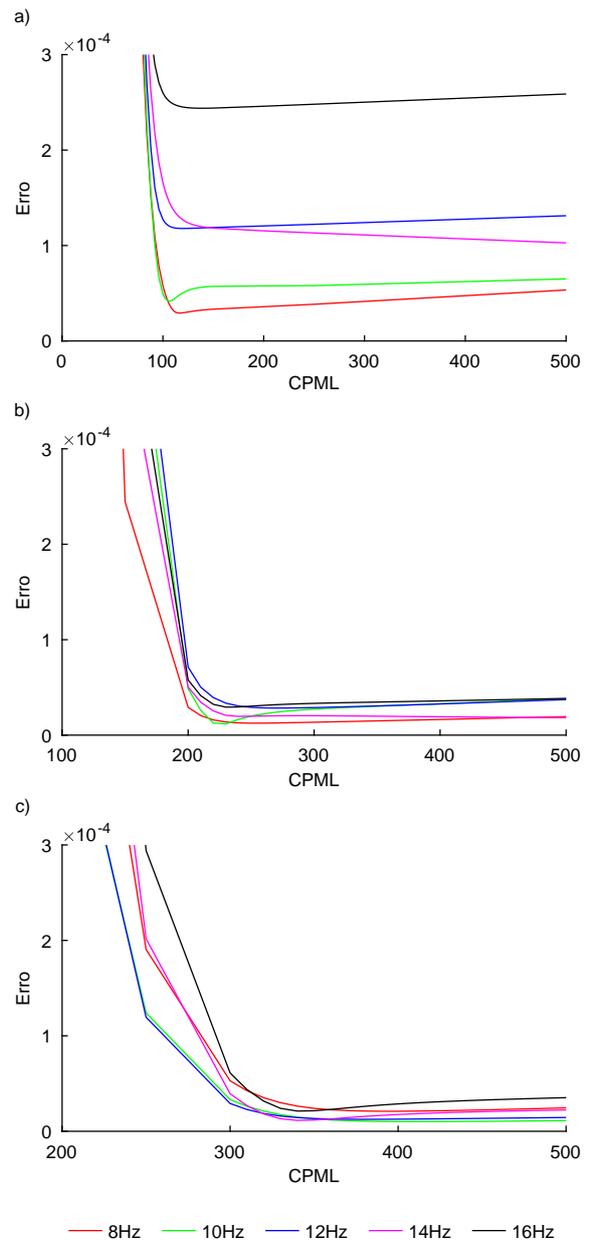


Figura 3 – Erro médio da solução para diversas frequências, camadas de 100 pontos e espaçamento de malha de 1,0m: (a)1500m/s, (b)300m/s e (c) 4500 m/s.

Se fizermos um detalhe na Figura 2, para que seja possível observar o que acontece com o erro quando valores baixos de C_{pml} são empregados, é possível notar que, para a frequência de 8Hz, acontece um aumento expressivo no erro quando valores de C_{pml} próximos de 10 são empregados. Tal detalhe é apresentado na Figura 4. Tal observação levou ao questionamento se o aumento do erro não poderia estar associado a uma relação entre comprimento de onda e tamanho da camada de absorção. Para verificar tal hipótese, o mesmo problema foi resolvido para malha com espaçamento de 2,5m, frequência de 8Hz e velocidade de propagação da onda no meio de 1500m/s, com camadas PML de 50, 100 e 150 pontos. A Figura 5 apresenta os erros médios destas simulações.

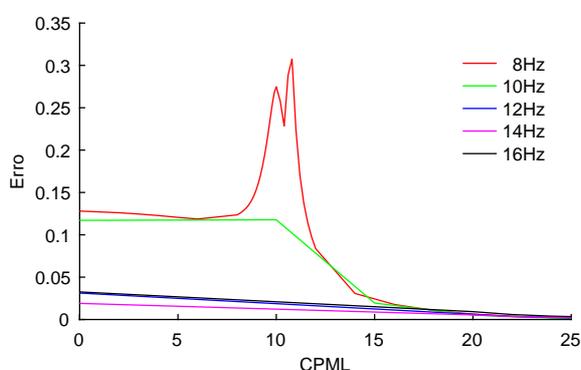


Figura 4 – Comportamento do erro da solução numérica para valores baixos de C_{pml} usando camadas de 100 pontos, velocidade de 1500m/s.

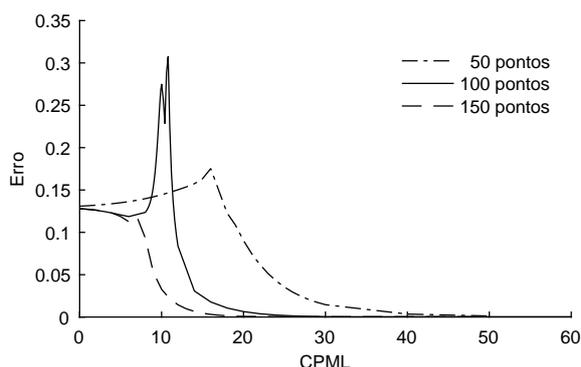


Figura 5 – Para a frequência de 8Hz e meio com velocidade de 1500m/s, erro da solução com camadas de diferentes espessuras: 50, 100 e 150 pontos.

Discussão e Conclusões

Foi possível, para meios semi-infinitos com velocidades de propagação uniformes, comparar a solução analítica com a solução numérica para diferentes comprimentos de onda, espessuras de camada PML e diferentes valores do parâmetro C_{pml} . Pôde-se concluir que existe uma dependência entre comprimento de onda e espessura da camada de absorção que leva a um aumento nos erros médios da solução numérica, embora isto não seja um problema, pois o uso de valores suficientemente grandes para o parâmetro C_{pml} gera soluções com erros relativamente baixos. Além disso, o uso de valores cada vez maiores de C_{pml} , por sua vez, não gera problemas na solução numérica, uma vez que o erro aumenta suavemente após o valor ótimo de C_{pml} . Tal característica permite o uso da PML com segurança, visto que simulações em meios bastante heterogêneos são frequentemente necessários para o processamento de dados sísmicos. Nestes casos, sugere-se utilizar C_{pml} superior a 300, pois nesta faixa de valores, as soluções obtidas possuem erros estáveis em relação ao valor da C_{pml} , das frequências e das velocidades de propagação empregadas.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à Capes, ao CNPq (PIBIC e 306.933/2014-4), à Faperj (201.453/2014, 203.234/2016, 203.021/2017, 200.627/2018) e à Petrobras (CENPES-13426) pelo suporte a este trabalho.

Referências

- Abubakar, A.; Hu, W.; Habashy, T. M. & van den Berg, P. M., 2009. Application of the finite-difference contrast-source inversion algorithm to seismic full-waveform data. In: *Geophysics* 74, Nr. 6, S. WCC47-58.
- Aster, R. C.; Borchers, B. & Thurber, C. H., 2005. *Parameter Estimation and Inverse Problems*, United States of America: Elsevier Academic Press.
- Berenger, J. P., 1994. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. In: *J. Comput. Phys.* 114, S. 185—200.
- Bunks, C.; Saleck, F. M.; Zaleski, S. & Chavent, G., 1995. Multiscale seismic waveform inversion. In: *Geophysics* 60, Nr. 5, S. 1457-1473.
- Cerjan, C.; Kosloff, D.; Kosloff, R. & Reshef, M., 1985. A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations. In: *Geophysics* 50, Nr. 4, S. 705-708.
- Clayton, R. & Engquist, B., 1977. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. In: *Bulletin of the seismological society of America* 67, Nr. 6, S. 1529—1540.

- Demmel, J. W., 1997. Applied numerical linear algebra: SIAM.
- Fichtner, A., 2011. Full seismic waveform modelling and inversion, Germany: Springer.
- Hustedt, B.; Operto, S. & Virieux, J., 2004. Mixed-grid and staggered-grid finite-difference methods for frequency-domain acoustic wave modelling. In: Geophysical Journal International 157, Nr. 3, S. 1269-1296.
- Komatitsch, D. & Tromp, J., 2003. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation. In: Geophysical Journal International 154, Nr. 1, S. 146-153.
- Li, X. S. & Demmel, J. W., 2003. SuperLU_DIST: A Scalable Distributed-Memory Sparse Direct Solver for Unsymmetric Linear Systems. In: ACM Trans. Mathematical Software 29, Nr. 2, S. 110-140.
- Liu, Q.-H. & Tao, J., 1997. The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media. In: The Journal of the Acoustical Society of America 102, Nr. 4, S. 2072-2082.
- Marelli, S.; Maurer, H. & Manukyan, E., 2012. Validity of the acoustic approximation in full-waveform seismic crosshole tomography. In: Geophysics 77, Nr. 3, S. R129-R139.
- Peters, F. C.; Junior, E. F. F.; Mansur, W. J.; Filho, D. M. S.; da Silva Garcia Monteiro, C. & Carvalho, P., 2017. An adaptive meshless parameterization for full waveform inversion. In: Engineering Analysis with Boundary Elements 83, S. 113 – 122.
- Peters, F. C.; Junior, E. F. F.; Mansur, W. J.; Filho, D. M. S.; da Silva Garcia Monteiro, C.; Lomeu, P. F. S. & de Souza, R. V. M., 2017. A multiscale meshless parametrization for full waveform inversion : 15th International Congress of the Brazilian Geophysical Society, S. 313-318.
- Peters, F. C.; Mansur, W. J.; da Silva G. Monteiro, C.; Pereira, W. L. A. & Filho, D. M. S., 2015. FWI: The role of the imaging frequencies and the number of iterations in the reduction of the sensibility to noise : 14th International Congress of the Brazilian Geophysical Society, S. 307-312.
- Plessix, R., 2006. A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. In: Geophysical Journal International 167, Nr. 2, S. 495—503.
- Pratt, R. G., 1999. Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 1: Theory and verification in a physical scale model. In: Geophysics 64, Nr. 3, S. 888—901.
- Reynolds, A. C., 1978. Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems. In: Geophysics 43, Nr. 6, S. 1099-1110.
- Virieux, J. & Operto, S., 2009. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. In: Geophysics 74, Nr. 6, S. WCC1-WCC26.
- Yilmaz, O., 1987. Seismic data Analysis processing, Inversion, and Interpretation of Seismic Data. In: of Exploration Geophysicists, S. (Hrsg.), USA.
- Zeng, Y. Q. & Liu, Q. H., 2001. A staggered-grid finite-difference method with perfectly matched layers for poroelastic wave equations. In: The Journal of the Acoustical Society of America 109, Nr. 6, S. 2571-2580.