



Experimentos Numéricos para o Gradiente do FWI via Método dos Estados Adjuntos: uma comparação entre o domínio do tempo e o domínio da frequência.

Isadora A. S. de Macedo* (UFPA, Faculdade de Geofísica, Belém (PA), Brasil & INCT-GP), Natiê Almeida Albano (UFPA, Faculdade de Geofísica, Belém (PA))

Copyright 2018, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 8th Brazilian Symposium on Geophysics, held in Salinópolis, Brazil, 18 to 20 september 2018.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 8th Brazilian Symposium on Geophysics and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

Introdução

Um dos desafios dos métodos sísmicos é gerar uma imagem em alta resolução das propriedades físicas da subsuperfície através do desenvolvimento de complexos sistemas de aquisição e algoritmos acurados para modelagem dos campos de onda observados. Uma das formas de investigar as estruturas da subsuperfície é através da construção da matriz das derivadas de Fréchet, a qual indica a sensibilidade dos dados observados aos parâmetros do meio, utilizando algoritmos de otimização do tipo Gauss-Newton. Esta abordagem é inviável para aquisições sísmicas por conta do alto custo computacional e alta demanda de armazenamento. Lailly (1983) e Tarantola (1994) reformularam problema de otimização, onde deseja-se minimizar o erro entre o dado observado e o dado calculado a partir de uma modelagem numérica. Estes autores mostraram como computar de maneira eficiente o gradiente da função objetivo através do método de estados adjuntos. Com esta abordagem, o gradiente da função objetivo (soma dos quadrados dos resíduos entre o campo calculado e observado) é obtido através da correlação cruzada entre o campo de onda propagado pela fonte e o campo residual propagado a partir dos receptores, de forma semelhante à condição de imagem proposta por Claerbout (1971) para migração de dados sísmicos. Computado o gradiente, algoritmos de otimização do tipo gradientes conjugados não linear e do tipo quasi-Newton permitem atualizar o modelo iterativamente. A partir de um modelo inicial, a cada iteração, modelo de velocidade é atualizado de modo a minimizar a função objetivo. Cada estimativa do gradiente é dispendiosa, com o custo aproximado de uma migração RTM, pois considera todas as fontes, receptores e o tempo total de aquisição.

Com o advento de aquisições sísmicas multi-azimute e de longos offsets e de fontes com maior banda de frequência, a inversão do campo completo de onda - *Full Waveform Inversion* (FWI) - ganhou destaque com os trabalhos pioneiros de Pratt (1990) e Mora (1987). Com a FWI se deseja estimar os parâmetros físicos da subsuperfície com alta resolução e acurácia. Esta abordagem por consistir em um método de inversão não linear pode levar o

problema a uma solução que não consiste em um mínimo global, surgindo a necessidade de adotar estratégias que contornem o problema provocado pela não-linearidade da FWI, como a utilização de um modelo de velocidade inicial próximo do desejado, a presença de informações de baixa frequência nos dados observados e conhecimento da fonte utilizada na aquisição dos dados. A FWI pode ser implementada tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. A utilização de uma ou outra abordagem depende do tipo do problema. A questão da não-linearidade pode ser abordada com a inversão multi escala, a qual consiste em inverter o dado separadamente para bandas de frequência crescentes.

A FWI iterativamente atualiza o modelo de parâmetros com uma quantidade que depende do gradiente da função objetivo. De modo geral, a computação do gradiente no domínio do tempo está dividida em três partes, a 1) modelagem direta no tempo dos campos de onda a partir da fonte, 2) modelagem do campo de onda adjunto reverso no tempo a partir das fontes adjuntas, localizadas na posição dos receptores, e 3) aplicação de um operador de condição de imagem. O cálculo do gradiente é o principal fator a influenciar o alto custo computacional da FWI, uma vez que requer a correlação cruzada entre o campo da fonte e o campo adjunto para todos os instantes de tempo, para todos os receptores e para todas as fontes. Dentro deste contexto, este trabalho visa descrever as etapas realizadas para a implementação computacional do gradiente da função objetivo para a equação acústica da onda no domínio do tempo, além de apresentar experimentos numéricos comparando o gradiente da função objetivo obtido no domínio do tempo com o gradiente correspondente a partir da formulação no domínio da frequência.

Formulação matemática: método dos estados adjuntos

Domínio do tempo

Seja a equação acústica da onda com densidade constante dada por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - v^2(\mathbf{x})\nabla^2 p = s(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), \quad (1)$$

onde $p(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s)$ é o campo de pressão, $v(\mathbf{x})$ é a velocidade do meio, $s(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$ o termo fonte e fazendo $c(\mathbf{x}) = v^2(\mathbf{x})$ a equação de estado para o problema inverso será dada por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c(\mathbf{x})\nabla^2 p - s(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) = 0. \quad (2)$$

Define-se a função objetivo como:

$$J = \frac{1}{2} \sum_s \sum_r \sum_t \left[p^{obs}(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) - p(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) \right]^2, \quad (3)$$

onde $p^{obs}(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s)$ e $p(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s)$ representam o campo observado e calculado, respectivamente.

De posse da função objetivo e da equação de estado, pode-se construir a Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p, \Lambda | c) = & \frac{1}{2} \sum_s \sum_r \sum_t \left[p^{obs}(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) - p(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) \right]^2 \\ & + \sum_s \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_0^t dt \Lambda \left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c(\mathbf{x}) \nabla^2 p - s(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

em que $\Lambda(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s)$ representa o estado adjunto associado a equação de estado.

Avaliando apenas as variações de primeira ordem na Lagrangeana, realizando integrações por parte nos termos com variação do campo de onda e exigindo que haja apenas a variação do funcional em relação às propriedades físicas, encontra-se a equação de estados adjuntos descrita por:

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} - \nabla \cdot [c(\mathbf{x}) \nabla \Lambda] = \sum_r \left[p(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) - p^{obs}(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) \right] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r), \quad (5)$$

cujas fontes adjuntas são o resíduo do campo observado e calculado. Uma vez calculado o campo adjunto Λ pela equação de estados adjuntos (5) e aplicando as condições de fronteira impostas a Λ que exige que a mesma seja nula nas bordas, a variação do funcional - gradiente da função objetivo - em relação às propriedades físicas será dada por:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_s \int_{\Omega} d\mathbf{x} \delta c(\mathbf{x}) \int_0^T dt \left[\nabla^2 p(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) \Lambda(t, \mathbf{x}; \mathbf{x}_s) \right]. \quad (6)$$

Domínio da frequência

Esta seção mostra, de forma geral, como obter o gradiente da função objetivo no domínio da frequência. Aspectos da modelagem no domínio da frequência são comentados nas próximas seções. Seja a equação da onda no domínio da frequência definida por:

$$-\omega^2 M \mathbf{u}(\omega) + K \mathbf{u}(\omega) = f(\omega), \quad (7)$$

onde M representa a matriz de massa (*mass matrix*), K representa a matriz de rigidez (*stiffness matrix*), ω é a frequência angular, f é a fonte e \mathbf{u} é o campo de onda discretizado. A equação 7 pode ser expressa como um sistema linear da forma:

$$L \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (8)$$

onde os termos $(-\omega^2 M + K)$ da equação 7 compõe a matriz L .

Define-se a função objetivo como:

$$\chi(m) = \chi[\mathbf{u}(m)]. \quad (9)$$

Derivando-a em relação aos parâmetros que desejam ser recuperados, representados por m , tem-se:

$$\frac{\partial \chi}{\partial m} = \nabla_{\mathbf{u}} \chi \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m}. \quad (10)$$

O termo $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m}$ constitui a matriz de sensibilidade. Como calculá-la explicitamente é caro computacionalmente, utiliza-se o método dos estados adjuntos para computar o gradiente da função objetivo sem a necessidade de calcular todas as componentes dessa matriz. Para tanto, deriva-se a equação 8 em relação aos parâmetros:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} = -L^{-1} \frac{\partial L}{\partial m} \mathbf{u} \quad (11)$$

Substituindo a equação 11 em 10, tem-se:

$$\frac{\partial \chi}{\partial m} = -\mathbf{u} \frac{\partial L^T}{\partial m} (L^{-1})^T \nabla_{\mathbf{u}} \chi. \quad (12)$$

Definindo-se:

$$L^H \cdot \mathbf{u}^\dagger = -\nabla_{\mathbf{u}} \chi \quad (13)$$

e substituindo em 12, tem-se:

$$\frac{\partial \chi}{\partial m} = \mathbf{u} \frac{\partial L^H}{\partial m} \mathbf{u}^\dagger. \quad (14)$$

A equação 14 é o gradiente da função objetivo no domínio da frequência. Os índices H e \dagger representam o transposto hermitiano para a matriz e para o vetor, respectivamente. O campo \mathbf{u} é obtido através da modelagem direta no domínio da frequência e o campo adjunto \mathbf{u}^\dagger é obtido através da solução da equação 13, que também constitui uma modelagem, porém com a fonte sendo o resíduo entre os campos. Essas modelagens, por sua vez, são alcançadas através da solução do sistema linear mostrado na equação 8.

Experimentos numéricos: par fonte receptor

Esta seção mostra os resultados gerados com o algoritmo que calcula o gradiente para um par fonte-receptor. A equação 6 foi implementada neste trabalho para gerar o gradiente: é realizada a correlação cruzada entre o campo adjunto (modelado a partir da equação 5) e

Tabela 1: Parâmetros do modelo homogêneo

Parâmetros do modelo homogêneo		
n_x	Número de pontos na direção x	301
n_z	Número de pontos na direção z	301
dx	Incremento espacial na direção x	10.0m
dz	Incremento espacial na direção z	10.0m
f	Frequência pico do pulso fonte	10Hz
t	Tempo total de modelagem	4s
V_c	Velocidade do modelo calculado	3500m/s
V_o	Velocidade do modelo observado	3000m/s

o laplaciano do campo de onda direto. Utilizou-se a equação 1 parametrizada para $c(\mathbf{x}) = v^2(\mathbf{x})$ para computar o campos de onda direto para o modelo calculado. O procedimento para gerar estes gradientes, para todos os modelos testados, foi o seguinte:

1. Define-se a posição da fonte, a posição do receptor e a frequência pico do pulso fonte.
2. Define-se um modelo de velocidade observado e registra-se o traço sísmico na posição do receptor.
3. Define-se um modelo de velocidade inicial (calculado) e registra-se o traço na posição do receptor e armazena-se o laplaciano do campo de onda direta propagado na modelagem.
4. Calcula-se o resíduo entre os traços registrados com o modelo observado e com o modelo calculado.
5. Utilizando o resíduo como fonte, propaga-se, reversamente no tempo, o campo de onda adjunto a partir da posição do receptor e armazena-se os campos retropropagados.
6. Para o mesmo ponto no espaço e no tempo, calcula-se a correlação cruzada entre o laplaciano do campo direto e o campo adjunto que gerará um ponto imagem no gradiente.

Modelo homogêneo

O primeiro resultado diz respeito ao gradiente calculado em um meio homogêneo cujos parâmetros estão descritos na tabela 1. A figura 1 mostra o gradiente calculado para duas frequências distintas: 5Hz e 10Hz.

O teste no modelo homogêneo mostra o efeito isolado das ondas transmitidas no gradiente do FWI (*Transmission FWI*), uma vez que no modelo homogêneo não haverá ondas refletidas. O destaque se dá para as *banana kernels*. Com o offset fixo, mantendo a mesma escala e mudando apenas a frequência, é possível notar o efeito da mesma no gradiente: as frequências mais baixas mostram ter uma contribuição maior no gradiente quando comparada às frequências mais altas.

Modelo com refletor

Um teste no modelo com um refletor foi realizado para validar o algoritmo do gradiente e para verificar a relação existente entre o offset e a profundidade de iluminação do gradiente. Neste caso, foram realizados dois modelos com

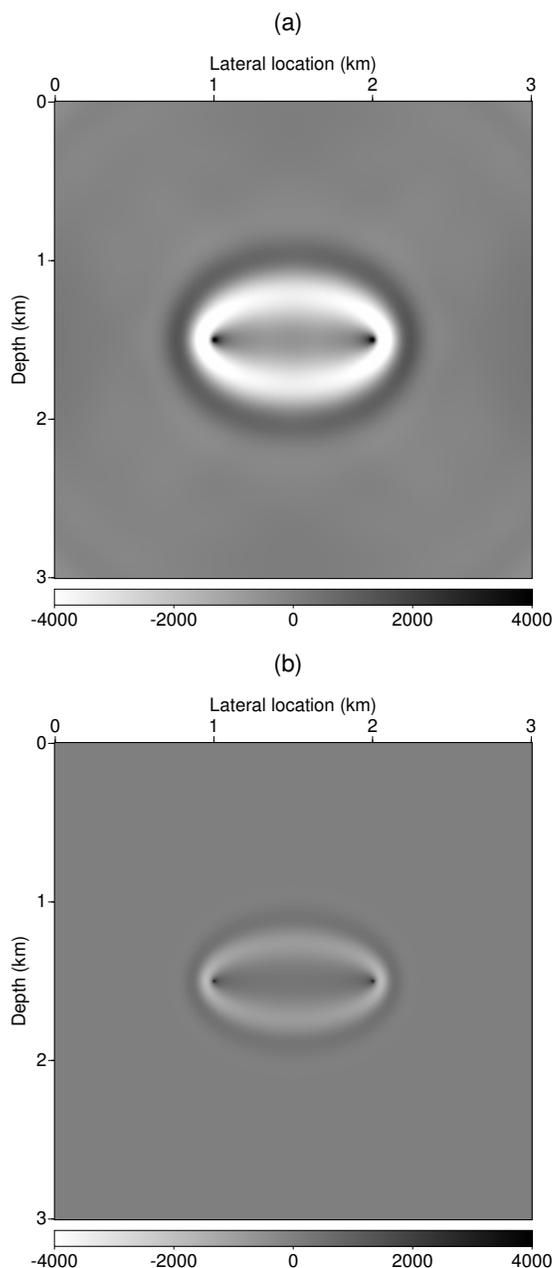


Figura 1: Gradientes calculados para o meio homogêneo com diferentes frequências pico do pulso fonte. a) Frequência de 5Hz. b) Frequência de 10Hz.

profundidades distintas do refletor: 1000m e 2500m. Os parâmetros dos modelos estão na tabela 2.

Os modelos observado e calculado possuem a mesma profundidade do refletor e é alterada apenas a velocidade da camada inferior com o intuito de eliminar o efeito da onda direta e isolar os eventos de reflexão. Isso destaca as *rabbit ears kernels* que constituem o *Reflection FWI*. O teste mostrou a influência do offset na iluminação do refletor no gradiente, o que afeta a recuperação da propriedade física do refletor na inversão. Ao comparar os gradientes do offset de 500m com os gradientes do offset de 2000m (figura 4), nota-se que o aumento do offset possibilita a iluminação de refletores nas porções mais

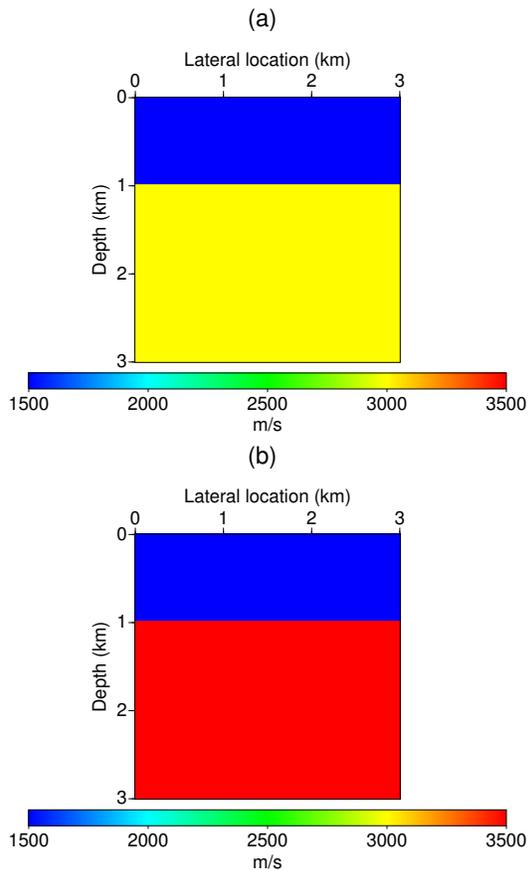


Figura 2: Modelo com refletor na profundidade de 1000m. a) Modelo observado b) Modelo calculado.

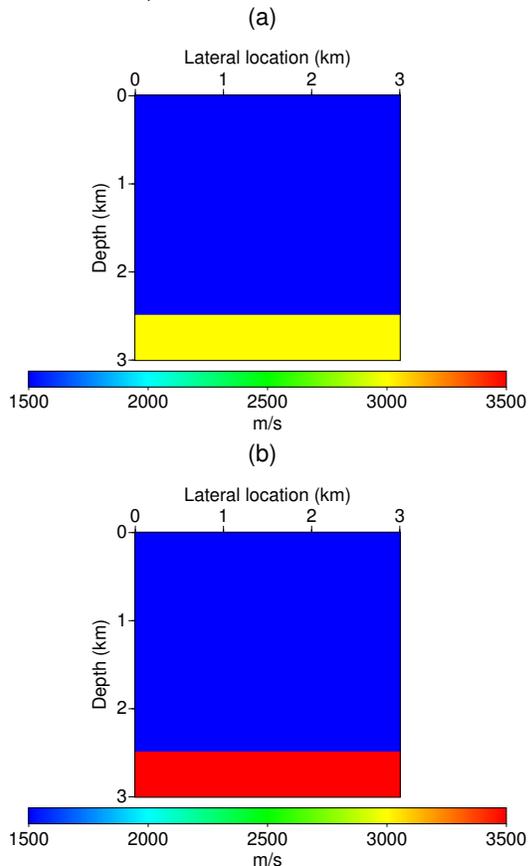


Figura 3: Modelo com refletor na profundidade de 2500m. a) Modelo observado b) Modelo calculado.

Tabela 2: Parâmetros do modelo com refletor

Parâmetros do modelo com refletor		
n_x	Número de pontos na direção x	301
n_z	Número de pontos na direção z	301
dx	Incremento espacial na direção x	10.0m
dz	Incremento espacial na direção z	10.0m
f	Frequência pico do pulso fonte	10Hz
t	Tempo total de modelagem	4s
V_c	Velocidade inferior do modelo calculado	3500m/s
V_o	Velocidade inferior do modelo observado	3000m/s
V	Velocidade da camada superior	1500m/s

Tabela 3: Parâmetros da aquisição: modelo Marmousi

Parâmetros da aquisição: modelo Marmousi		
N_{shot}	Número de tiros	138
N_{rcv}	Número de receptores	180
d_{shot}	Espaçamento entre os tiros	65m
d_{rcv}	Espaçamento entre os receptores	50m
t	Tempo total de modelagem	4s
dt	Tempo de registro do traço	0.004s

profundas do modelo e que quando o refletor está raso e o offset é longo, as porções mais rasas atingem o seu máximo de iluminação. Ao relacionar o resultado deste teste com o resultado dos testes realizados no modelo homogêneo, que mostrou que a resposta do gradiente é melhor e mais nítida para as menores frequências, pode-se concluir que é preciso que haja um balanço entre a frequência utilizada no FWI e o offset para que seja possível obter o melhor resultado no gradiente e se possa iluminar até as regiões mais profundas do modelo, uma vez que as baixas frequências e os longos offsets produzem a melhor iluminação.

Experimentos numéricos: várias fontes e receptores e comparação com o domínio da frequência

Modelo Marmousi

Ao simular uma aquisição completa no modelo Marmousi e calcular o gradiente, comparamos os resultados obtidos no domínio do tempo com os resultados obtidos a partir de um algoritmo que calcula o gradiente no domínio da frequência. Os parâmetros da aquisição neste modelo estão indicados na tabela 3 e os modelos observado e calculado estão na figura 5.

O teste no modelo Marmousi mostrou que o gradiente para a aquisição completa se assemelha ao modelo. A parte mais rasa do gradiente ficou com as amplitudes maiores, o que é natural, já que com a profundidade os campos de onda perdem amplitude devido a divergência esférica, espalhamento geométrico, dentre outros fatores. É possível que as faixas de maior amplitude no topo da imagem sejam devido a linha de receptores posicionados a uma profundidade de 50 metros e à profundidade da lâmina de água do modelo. Comparando as imagens, nota-se que o gradiente ficou com uma melhor resolução para a menor frequência. Um algoritmo que calcula o gradiente da função objetivo para a equação da onda acústica no domínio da frequência foi disponibilizado para que pudesse ser possível a comparação com aqueles produzidos no domínio do tempo. Uma das vantagens

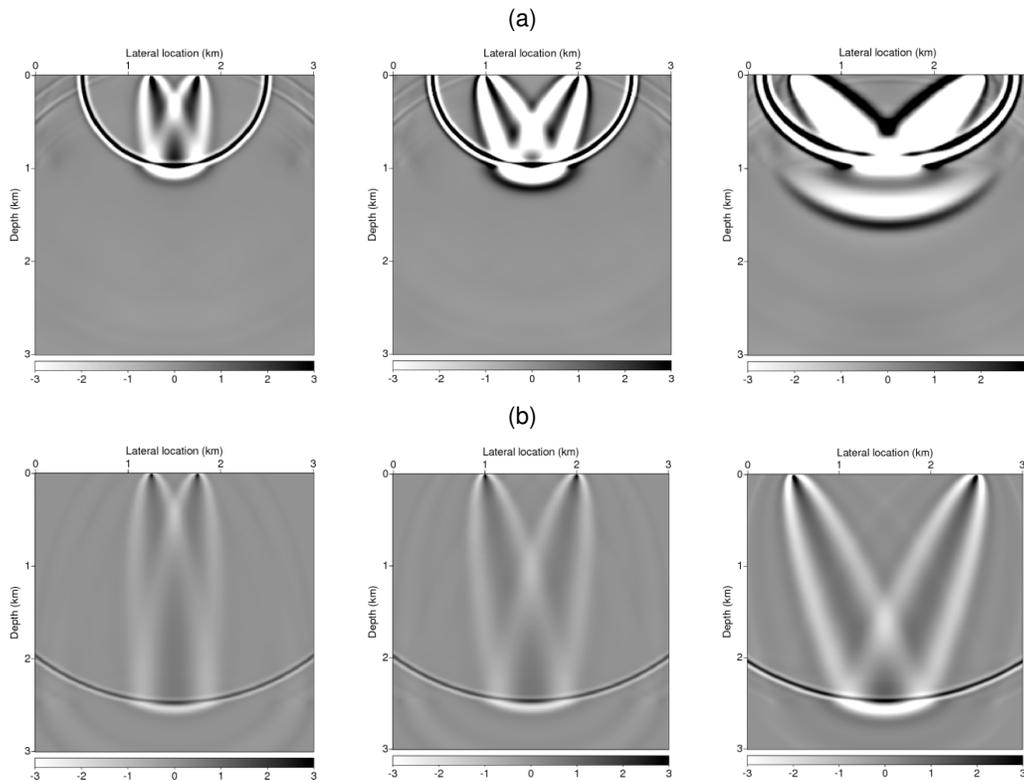


Figura 4: a) Gradiente calculado no domínio do tempo para o modelo com refletor posicionado a 1000m de profundidade para os offsets de 500m, 1000m e 2500m respectivamente. b) Gradiente para o modelo com refletor posicionado a 2500m de profundidade para os offsets de 500m, 1000m e 2500m respectivamente.

do cálculo do gradiente no domínio da frequência é a possibilidade de calculá-lo para uma única frequência ou para uma banda de frequência, o que faz com que o tempo de processamento do algoritmo seja consideravelmente menor do que no domínio do tempo. É mostrada nessa seção a imagem final do gradiente computado no domínio da frequência para diferentes bandas de frequência utilizando o modelo Marmousi mostrado na figura 5. A frequência pico do pulso fonte utilizada nestes testes foi de 5Hz. A banda de frequência do dado é de cerca de três vezes a frequência pico, ou seja, o algoritmo é capaz de gerar gradientes para uma banda de frequência até cerca de 15Hz para este modelo.

Os gradientes para uma única frequência mostram o que esta frequência foi capaz de imagear no gradiente e como ela vai contribuir na recuperação do modelo de velocidade. Nota-se que as imagens para uma única frequência mostram a forma geral do Marmousi enquanto que as imagens do gradiente para uma banda de frequência são mais detalhadas e com mais estruturas aparentes. O gradiente para a menor banda de frequência (2Hz a 5Hz) mostrou ter a melhor resolução na imagem, menos distorções são aparentes no fundo do modelo e as estruturas estão bem delimitadas. Observa-se que o aumento da banda de frequência introduz artefatos no gradiente que não estão presentes no modelo de velocidade que se deseja recuperar.

Discussão e Conclusões

Os experimentos numéricos para o gradiente nos domínios do tempo e frequência mostraram que as imagens com melhor distinção de estruturas do modelo foi alcançada com as menores frequências. Para ambos os domínios, o aumento da frequência introduziu artefatos no gradiente que não condiziam com o modelo de velocidade e que podem prejudicar a inversão. Além disso, mostrou-se a forma do gradiente em relação a eventos específicos, como o surgimento das *banana kernels* no gradiente do modelo homogêneo que só produz ondas transmitidas nos campos de onda e o surgimento das *rabbit ears kernels* no gradiente do modelo com o refletor. Foi possível observar a relação existente entre o offset e a profundidade de iluminação no gradiente: o máximo de iluminação é atingido em refletores rasos e com longos offsets e apenas os longos offsets foram capazes de iluminar refletores mais profundos. A relação offset vs. frequência também foi analisada e concluiu-se que as baixas frequências e os longos offsets produzem uma resposta melhor no gradiente, o que provavelmente contribuirá para produzir melhores resultados na recuperação do modelo de velocidade.

Agradecimentos

Aos professores Jessé Carvalho Costa e Daniel Leal Macedo pela orientação, ao pós-doutorando Carlos Alexandre Nascimento da Costa pela solicitude e disponibilização dos algoritmos no domínio da frequência e a CAPES, CNPq, CPGf/UFGA e INCT-GP pelo suporte.

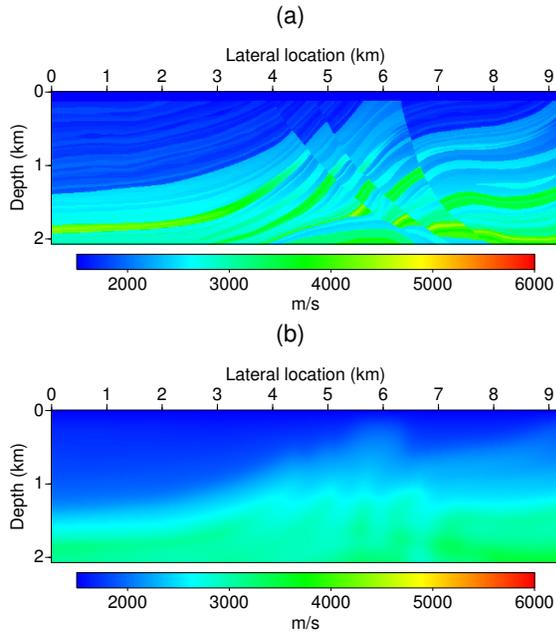


Figura 5: a) Modelo Marmousi utilizado para gerar o dado observado. b) Modelo Marmousi suavizado para ser o modelo inicial.

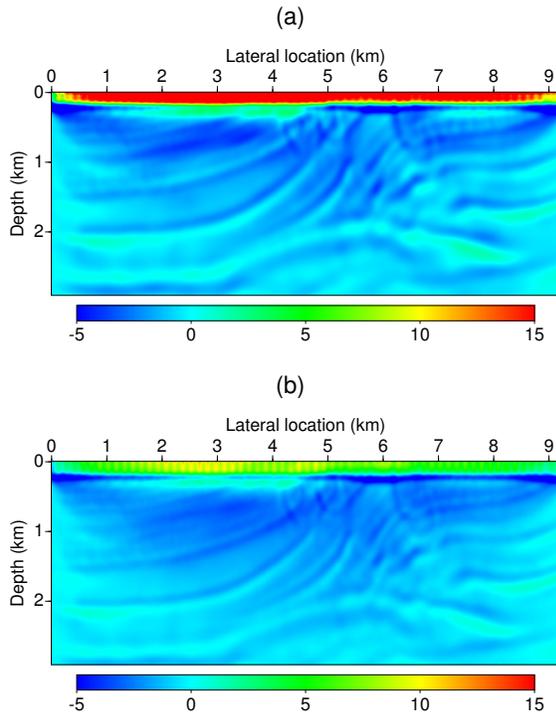


Figura 6: Gradiente calculado no domínio do tempo para o modelo Marmousi para uma aquisição completa. a) Frequência de 5Hz. b) Frequência de 10Hz.

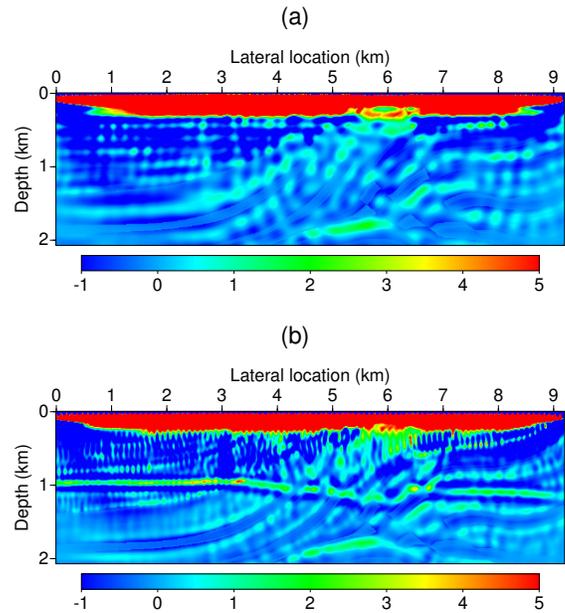


Figura 7: Gradiente calculado no domínio da frequência para o modelo Marmousi para uma aquisição completa. a) Utilizando uma banda de frequência de 2Hz a 5Hz, com incremento de 0.5Hz. b) Utilizando uma banda de frequência de 2Hz a 12Hz com incremento de 1Hz.

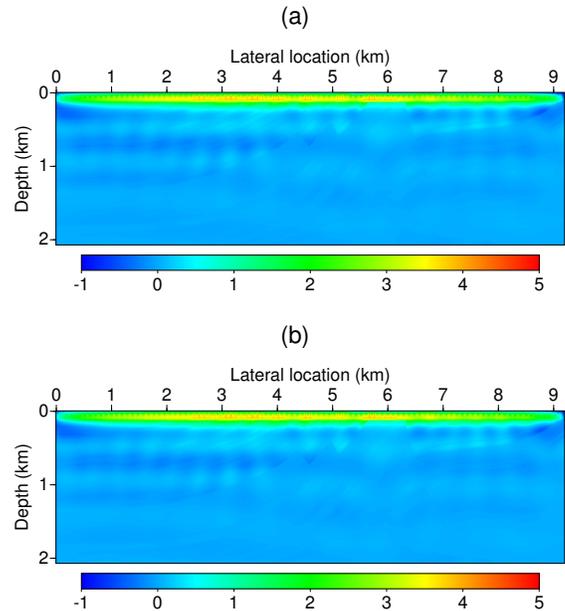


Figura 8: Gradiente calculado no domínio da frequência para o modelo Marmousi para uma aquisição completa utilizando apenas uma única frequência. a) Apenas para a frequência de 5Hz. b) Apenas para a frequência de 12Hz.

Referências

- Claerbout, J., 1971, Toward a unified theory of reflector mapping: *Geophysics*, **36**, 467–481.
- Lailly, P., 1983, The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations: Conference on Inverse Scattering, Theory and Application, Society for Industrial and Applied Mathematics, **00**, 206–220.
- Mora, P. R., 1987, Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multi-offset seismic data: *Geophysics*, **52**, 1211–1228.
- Pratt, R. G., W. M. H., 1990, Inverse theory applied to multisource cross-hole tomography, Part 1: Acoustic wave-equation method: *Geophysical Prospecting*, **38**, 287–310.
- Tarantola, A., 1994, Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation: *Canadian Journal of Exploration Geophysics*, **49**, 1259–1266.