

# Comparação entre o Algoritmo $\varepsilon$ de Wynn e o $\Delta^2$ de Aitken no cálculo de componentes eletromagnéticas de fontes geofísicas dipolares.

Alex Fabrício de Andrade Silva & Valdelírio da Silva e Silva,  
Universidade Federal do Pará – Campus Castanhal.

Copyright 2018, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica.

Este texto foi preparado para a apresentação no VIII Simpósio Brasileiro de Geofísica, Salinópolis, 18 a 20 de setembro de 2018. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do VIII SimBGF, mas não necessariamente representa a opinião da SBGf ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGf.

## Resumo

Este trabalho apresenta os procedimentos utilizados na determinação de componentes de campo eletromagnético de algumas fontes geofísicas em modelos geoeletrônicos unidimensionais por meio de quadratura com extrapolação (QWE-*Quadrature With Extrapolation*). Os resultados com o QWE foram determinados a partir de duas técnicas de aceleração de convergência: o algoritmo  $\varepsilon$  de Wynn e o processo  $\Delta^2$  de Aitken. Com análises tomadas no emprego ao Dipolo Elétrico Horizontal na direção x (DEHx), o Dipolo Magnético Vertical (DMV) e o Dipolo Magnético Horizontal na direção x (DMHx) quando possuem solução analítica, demonstra-se que o algoritmo  $\Delta^2$  de Aitken também pode ser utilizado na modelagem de dipolos, tendo erro relativo na mesma ordem do algoritmo  $\varepsilon$ , mas em geral maior número de avaliações dos integrandos.

## Introdução

No domínio da frequência, em modelagem eletromagnética com fontes finitas ou pontuais, em alguma fase é necessária obter respostas de campo, em superfície ou em profundidade, decorrente da consideração do meio ser estratificado horizontal (modelagem 1D). Nessa situação as componentes de campo eletromagnético são expressas por integrais impróprias que representam a transformada inversa de Hankel (transformada apropriada no aproveitamento da simetria cilíndrica de comportamento dos campos 1D). Tais integrais podem ter a forma geral escrita como:

$$f(\omega, r, z) = \int_0^{\infty} F(k_r, z) J_n(k_r r) dk_r \quad (1)$$

que representam uma componente de campo eletromagnético  $f$  na posição de medida horizontal  $r$  e profundidade  $z$ , numa dada frequência  $\omega$ . Na função  $F(k_r, z)$  se tem informações da fonte e das propriedades geoeletrônicas das camadas, enquanto que  $J_n(k_r r)$  é uma função de Bessel do primeiro tipo e de ordem inteira  $n$ , que depende da posição de medida  $r$  e da variável de integração  $k_r$ . Os integrandos desse tipo tem comportamento altamente oscilante com dependência da posição de medida  $r$ , da frequência  $\omega$  de investigação aplicada à fonte geofísica, e, cujas amplitudes decaem dependendo não só da profundidade  $z$  de investigação quanto das propriedades físicas dos meios investigados.

Algumas técnicas numéricas foram adotadas em geofísica para a determinação de integrais do tipo da equação (1), entre elas a de filtros digitais lineares (Ghosh, 1971; Anderson, 1979; Guptasarma and Singh, 1997; Kong, 2007), a de quadraturas gaussianas com expansão de frações contínuas (Chave, 1983) e mais recentemente a de quadratura com extrapolação (QWE) (Key, 2012) e a QWE no plano complexo (QWECP) (Silva et al., 2014). Uma QWE faz uso de alguma técnica de aceleração de convergência (Weniger, 1989) para extrapolação das somas parciais obtidas entre os primeiros zeros do integrando. Key (2012) afirmou que o algoritmo  $\varepsilon$  foi a única técnica que resultou em convergência para as integrais com produto de funções de Bessel da bobina circular horizontal, mas não apresentou estudo de construção ou avaliativo com nenhuma outra técnica. Este trabalho apresenta resultados da aplicação do algoritmo  $\varepsilon$  de Wynn e do  $\Delta^2$  de Aitken na QWE para integrais do tipo (1) que possuem solução analítica para mostrar a aplicabilidade deste último para obtenção dos campos para fontes dipolares.

## Quadratura para Extrapolação

Para o estudo do QWE toma-se a equação (1) como sendo de série com somas parciais (Key, 2012):

$$f(\omega, r, z) = \int_0^{\infty} F(k_r) J_n(k_r r) dk_r = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \quad (2)$$

em que,

$$f_i = \int_{k_{r(i-1)}}^{k_{r(i)}} F(k_r) J_n(k_r r) dk_r \quad (3)$$

com os limites de integração  $k_{r(i-1)}$  e  $k_{r(i)}$  sendo zeros consecutivos da função  $J_n(k_r r)$ , ou de quaisquer outros zeros do integrando. Somas parciais da equação (2) são dadas por:

$$S_n = \sum_{i=0}^n f_i \quad (4)$$

em que  $f_i$  consiste na estimativa:

$$f_i \approx \sum_{j=1}^m w_j F\left(\frac{x_j}{r}\right) J_n(x_j) \quad (5)$$

tendo  $m$  correspondente à ordem da quadratura, podendo ser dos trapézios, as de Simpson, Gauss-Legendre ou Gauss-Kronrod. Já  $x_j$  e  $w_j$  são as abscissas e pesos de ordem  $j$  da quadratura. Após a decisão de qual algoritmo será usado para a aceleração da convergência, o processo de extrapolação ocorre de forma iterativa até que seja satisfeito um critério de parada. O critério pode compreender, por exemplo, uma combinação de uma

tolerância relativa  $\alpha$  e uma tolerância absoluta  $\beta$  sobre o resultado extrapolado  $S_n^*$ :

$$\delta S_n^* \leq \alpha |S_n^*| + \beta \quad (6)$$

em que

$$\delta S_n^* = |S_n^* - S_{n-1}^*|. \quad (7)$$

**Escolha do Algoritmo de Aceleração**

A escolha e aplicação de um algoritmo de aceleração de convergência no procedimento da quadratura com extrapolção depende do tipo de série a que se pretender aplicar. De acordo com Weniger (1989) não é possível estabelecer um esquema de classificação completo capaz de abranger todos os tipos de convergência, dentro de alguns nomes especiais dados na literatura, mas na maioria das aplicações apenas alguns tipos de convergência ocorrem.

Havendo uma sequência  $s_n$  que converge para o limite  $s$ , a classificação do tipo de série é dada considerando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1} - s}{s_n - s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = \tau. \quad (8)$$

Quando  $0 < |\tau| < 1$ , então a série converge linearmente. Se  $\tau = 1$ , a mesma converge logaritmicamente. Se  $\tau = 0$ , então a série é dita convergir hiperlinearmente; e se  $|\tau| > 1$ , então a série diverge.

Mediante então várias integrais do tipo (1), que possuem solução analítica na modelagem eletromagnética em geofísica (DEHx, DMV, DMHX em semi-espaco), testes foram realizados para se classificar a convergência de suas séries a partir de suas somas parciais  $s_n$ . Em cada intervalo entre zeros foram utilizados 32 pontos da quadratura Gauss-Legendre e verificou-se que até com 1.000.000 intervalos considerados, os valores de  $\tau$  dado por (8) ficavam sempre próximos de 1, mas sempre menores que a unidade, caracterizando, em todas situações estudadas, que as integrais convergem linearmente. E com isso, seguindo Weniger (1989), as extrapolções dessas séries tem duas técnicas muito eficientes, o algoritmo  $\epsilon$  de Wynn e o algoritmo  $\Delta^2$  de Aitken.

**Algoritmo  $\epsilon$  de Wynn**

O algoritmo  $\epsilon$  de Wynn para aceleração de convergência, consiste em um método recursivo definido em três relações, como descrito por Weniger (1989):

$$\epsilon_0^{(n)} = s_n, \quad n \geq 0; \quad (9)$$

$$\epsilon_1^{(n-1)} = \frac{1}{s_n - s_{n-1}}, \quad n \geq 1; \quad (10)$$

$$\epsilon_j^{(n-j)} = \epsilon_{j-2}^{(n-j+1)} + \frac{1}{\epsilon_{j-1}^{(n-j+1)} - \epsilon_{j-1}^{(n-j)}}, \quad n \geq 2, \quad 2 \leq j \leq n; \quad (11)$$

A recursividade representada por essas equações é apresentada graficamente por Key (2012), onde os termos destacados em azul da figura (1) consistem nas melhores aproximações. As setas da cor preta referenciam-se à equação (10) e as azuis indicam os termos decorrentes da equação (11). Além disso, Key (2012) aponta ainda que os termos da primeira coluna do esquema dizem respeito às somas parciais diretas, e os termos subsequentes à direita referem-se às transformações de sequência compatíveis.

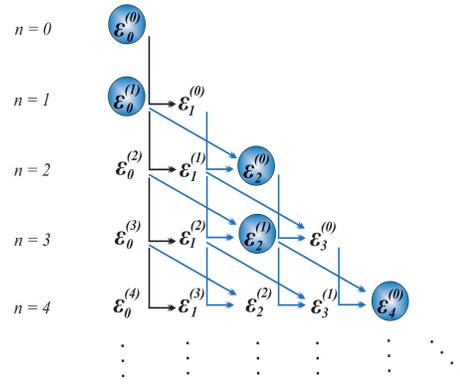


Figura 1: Ilustração gráfica adaptada de Key (2012) para a recursividade do algoritmo  $\epsilon$  de Wynn

**Processo  $\Delta^2$  de Aitken**

O processo  $\Delta^2$  de Aitken foi discutido e estudado por diversos autores, entre eles Shanks (1955), que contribuiu com algumas modificações e generalizações de modo que o tornou mais eficiente. Nos trabalhos de Brezinski (1978) e Wimp (1981) as propriedades do processo são abordadas e discutidas detalhadamente. Dentro do método recursivo as seguintes equações são levadas em consideração:

$$A_0^{(n)} = s_n, \quad n \geq 0, \text{ e} \quad (12)$$

$$A_j^{(n-2j)} = A_{j-1}^{(n-2j)} - \frac{[\Delta A_{j-1}^{(n-2j)}]^2}{\Delta^2 A_{j-1}^{(n-2j)}}, \quad n \geq 2, \quad 1 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor, \quad (13)$$

em que

$$[\Delta A_{j-1}^{(n-2j)}]^2 = (A_{j-1}^{(n-2j+1)} - A_{j-1}^{(n-2j)})^2, \quad (14)$$

$$\Delta^2 A_{j-1}^{(n-2j)} = A_{j-1}^{(n-2j+2)} - 2 * A_{j-1}^{(n-2j+1)} + A_{j-1}^{(n-2j)} \quad (15)$$

e sendo  $\lfloor n/2 \rfloor$  o maior número inteiro menor do que ou igual  $n/2$ .

O esquema de recursividade abrangendo as equações é mostrado na figura (2) a seguir, na qual os objetos em destaque na cor azul consistem nas melhores aproximações e os elementos da primeira coluna referem-se às somas parciais diretas, representando (12). Os termos subsequentes à primeira e segunda coluna em diante são sempre calculados a partir de três termos da coluna anterior, representando assim um padrão em forma de “L”, tal como é apresentado em (13).

**Resultados**

Tendo os algoritmos confeccionados em linguagem MATLAB, seguiu-se para análises de comparações entre os resultados alcançados em investigações com fonte de dipolos. As componentes de campo eletromagnético dessas fontes deveriam ser tais que pudessem ser comparadas com resultados analíticos, e por isso escolheu-se modelos com as fontes, e posições de medida ( $r$  da fonte) na interface de dois semi-espacos ( $z = 0$ ), o superior sendo o ar (de resistividade infinita) e o inferior com resistividade finita  $\rho$ .

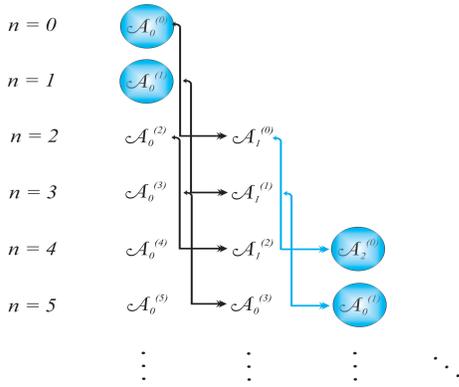


Figura 2: Representação gráfica da recursividade de  $\Delta^2$  de Aitken - Adaptado de Weniger (1989)

Nestes casos, o DEHx, o DMV e o DMHx foram as fontes usadas. Apesar de terem sido feitas comparações entre os algoritmos para todas as componentes com expressão analítica dessas fontes, são apresentadas abaixo somente uma componente de cada dipolo e que são capazes de ilustrar satisfatoriamente o desempenho desses algoritmos. As expressões de campo utilizadas por cada uma delas estão apresentadas nas equações (16), (17) e (18), e sendo sempre usado momentos elétrico ( $Id_{s_x}$ ) e magnéticos ( $m_z$  e  $m_x$ ) iguais a um. Para uma dada frequência  $f$  tem-se  $\zeta = i\omega\mu$  como a impedividade (com  $i$  sendo a unidade imaginária),  $\omega = 2\pi f$  rad/s a frequência angular e  $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m a permeabilidade magnética do vácuo. Associado ao semi-espaço inferior tem-se o número de onda  $k = \sqrt{-\zeta/\rho}$ , e a constante de propagação, no domínio  $k_r$  da transformada de Hankel,  $u = \sqrt{k_r^2 - k^2}$ .

Para o DMV e DMHx avaliamos a componente  $H_z$ , enquanto para o DEHx fizemos uso da componente  $E_x$  (Ward and Hohmann, 1988; Spies and Frischknecht, 1991; Kaufman et al., 2014):

$$E_x^{DEHx}(x,y) = \frac{Id_{s_x}\rho}{2\pi r^3} \frac{x}{r} \left[ 1 + (1 + ikr)e^{-ikr} \right] \\ = \frac{Id_{s_x}}{2\pi} \frac{x}{r} \left[ \frac{2\rho}{r^3} - \zeta \int_0^\infty \frac{k_r}{k_r + u} J_0(k_r r) dk_r \right] \quad (16)$$

$$H_z^{DMV}(r) = \frac{m_z}{2\pi k^2 r^5} [9 - (9 + 9ikr - 4k^2 r^2 - ik^3 r^3)e^{-ikr}] \\ = \frac{m_z}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k_r^3}{k_r + u} J_0(k_r r) dk_r \quad (17)$$

$$H_z^{DMHx}(x,y) = \frac{m_x k^2 x}{4\pi r^2} \left[ I_1\left(\frac{ikr}{2}\right) K_1\left(\frac{ikr}{2}\right) - I_2\left(\frac{ikr}{2}\right) K_2\left(\frac{ikr}{2}\right) \right] \\ = \frac{m_x}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty \frac{2k_r^3}{k_r + u} J_1(k_r r) dk_r \quad (18)$$

em que  $I$  e  $K$  são as funções de Bessel modificadas de primeira e segunda espécie, respectivamente, e apresentadas nas ordens 1 e 2.

Os resultados apresentados a seguir foram determinados com uma tolerância relativa de  $\alpha = 10^{-12}$  e uma tolerância absoluta de  $\beta = 10^{-15}$ . Foram definidos 100 zeros da função de Bessel de primeira espécie e ordem 1 ( $J_1$ ), e o mínimo de 32 pontos na quadratura de Gauss-Legendre foi o suficiente para gerar os melhores resultados para a QWE na apreciação do DEHx e do DMV. No caso do DMHx a

acurácia permaneceu inalterada somente a partir de 256 pontos da quadratura! Tendo fixada uma resistividade  $\rho$  do semi-espaço inferior, são apresentadas as curvas de erro relativo dos dois algoritmos QWE em relação às soluções analíticas, obtidos na extensão de frequência de 0,1 a 1000 Hz. Além disso, são apresentadas também as curvas comparativas dos números de avaliações dos integrandos; isso ilustra de certo modo, o requerimento computacional de cada um algoritmo para obtenção das respostas mediante o mesma exigência na convergência.

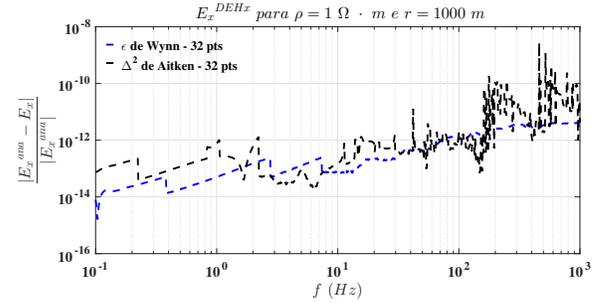


Figura 3: Erros relativos de DEHx -  $|E_x^{ana} - E_x|/|E_x^{ana}|$  para  $f$  logicamente discretizada no intervalo  $[10^{-1}, 10^3]$ , para  $\rho = 1 \Omega \cdot m$  e  $r = 1000$  m.

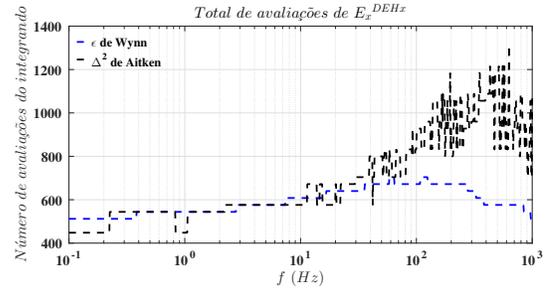


Figura 4: Números de avaliações de  $E_x^{DEHx}$  para  $f$  logicamente discretizada no intervalo  $[10^{-1}, 10^3]$ , para  $\rho = 1 \Omega \cdot m$  e  $r = 1000$  m.

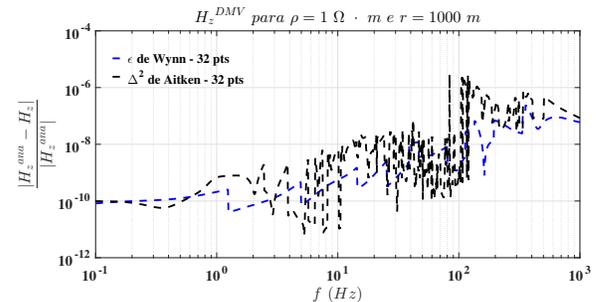


Figura 5: Erros relativos de DMV -  $|H_z^{ana} - H_z|/|H_z^{ana}|$  para  $f$  logicamente discretizada no intervalo  $[10^{-1}, 10^3]$ , para  $\rho = 1 \Omega \cdot m$  e  $r = 1000$  m.

## Discussão e Conclusões

Os resultados mostram que em algumas situações o algoritmo  $\Delta^2$  de Aitken apresenta precisão de mesma ordem, ou maior que a do algoritmo  $\epsilon$  de Wynn. Fixadas uma resistividade e uma posição de medida, os erros

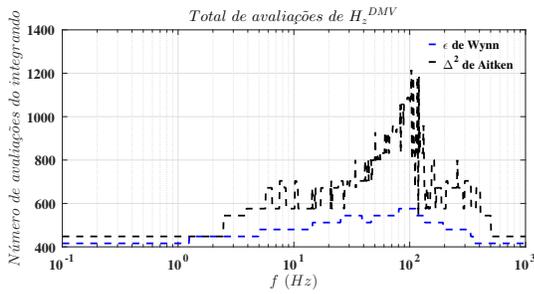


Figura 6: Números de avaliações de  $H_z^{DMV}$  para  $f$  logaritmicamente discretizada no intervalo  $[10^{-1}, 10^3]$ , para  $\rho = 1 \Omega \cdot m$  e  $r = 1000 m$ .

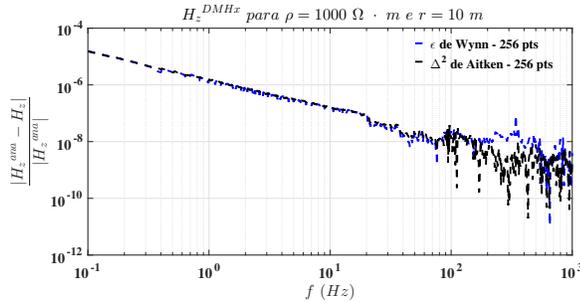


Figura 7: Erros relativos de DMHx -  $|H_z^{ana} - H_z| / |H_z^{ana}|$  para  $f$  logaritmicamente discretizada no intervalo  $[10^{-1}, 10^3]$ , para  $\rho = 1000 \Omega \cdot m$  e  $r = 10 m$ .

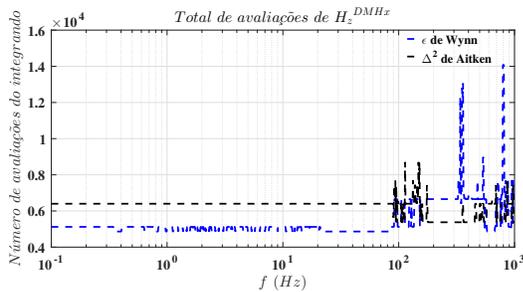


Figura 8: Números de avaliações de  $H_z^{DMHx}$  para  $f$  logaritmicamente discretizada no intervalo  $[10^{-1}, 10^3]$ , para  $\rho = 1000 \Omega \cdot m$  e  $r = 10 m$ .

relativos com  $\Delta^2$  de Aitken foram em geral mais oscilantes variando-se a frequência, e os números de avaliações dos kernels também maior.

Observando a estrutura da construção dos algoritmos, o processo  $\Delta^2$  de Aitken se mostra com uma maior simplicidade, apresentando uma menor quantidade de elementos de extrapolação, o que caracteriza maior facilidade quanto à programação.

Os algoritmos de aceleração de séries disponibilizam um método automático para determinação dos campos eletromagnéticos fazendo uso apenas de critérios de convergência dentro do processo iterativo. Mas em algumas situações ( $H_z$  do DMHx no modelo acima por exemplo!) os números mínimos de abscissas consideradas na quadratura são relativamente altos para alcançar uma alta acurácia ou precisão, de modo que cabe

o usuário decidir se usa QWE para obtenção das respostas com precisão alta ou não, ou filtros digitais lineares, que são mais fáceis de implementar, demandam menos tempo computacional (o maior tem 801 pontos!), mas precisão limitada para cada característica geoeletrica do modelo investigado.

Estes resultados dão incentivo para a realização de mais investigações considerando outros métodos de aceleração de convergência, como a utilização de algoritmos híbridos de aceleração de convergência de séries, que englobem vários algoritmos, como o  $\theta$  de Brezinski por exemplo (Brezinski, 1978).

**Agradecimento**

Agradecimento ao CNPQ pelo auxílio financeiro da pesquisa por intermédio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC-UFPA/Interior) de 2017.

**Referências**

Anderson, W. L., 1979, Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering: *Geophysics*, **44**, 1287–1305.

Brezinski, C., 1978, Algorithmes d'accélération de la convergence – Étude numérique: Editions Technip.

Chave, A. D., 1983, Numerical integration of related hankel-transforms by quadrature and continued fraction expansion: *Geophysics*, **48**, 1671–1686.

Ghosh, D. P., 1971, The application of linear filter theory to the direct interpretation of geoelectrical resistivity sounding measurements: *Geophysical Prospecting*, **19**, 192–217.

Guptasarma, D., and B. Singh, 1997, New digital linear filters for hankel  $j_0$  and  $j_1$  transforms: *Geophysical Prospecting*, **45**, 745–762.

Kaufman, A. A., D. Alekseev, and M. Oristaglio, 2014, Principles of electromagnetic methods in surface geophysics (methods in geochemistry and geophysics): Elsevier.

Key, K., 2012, Is the fast hankel transform faster than quadrature?: *Geophysics*, **77**, F21–F30. (n/a).

Kong, F. N., 2007, Hankel transform filters for dipole antenna radiation in a conductive medium: *Geophysical Prospecting*, **55**, 83–89.

Shanks, D., 1955, Non-linear transformations of divergent and slowly convergent sequences: *Journal of Mathematics and Physics*, **34**, 1–42.

Silva, V. S., C. Régis, and A. Q. H. Junior, 2014, Complex plane integration in the modelling of electromagnetic fields in layered media: part 1. application to a very large loop: *Journal of Geophysics and Engineering*, **11**, 015004.

Spies, B. R., and F. C. Frischknecht, 1991, 5, in *Electromagnetic Sounding: Society of Exploration Geophysicists*, 285–425.

Ward, S. H., and G. W. Hohmann, 1988, 4, in *Electromagnetic Theory for Geophysical Applications: Society of Exploration Geophysicists*, 130–311.

Weniger, E. J., 1989, Nonlinear sequence transformations for the acceleration of convergence and summation of divergent series: *Computer Physics Reports*, **10**, 189–371.

Wimp, J., 1981, Sequence transformations and their applications: Academic Press.