



## Estimación del factor de calidad (Q) con tomografía utilizando la ecuación Eikonal compleja

Tatiana Espinosa (Universidad de Pamplona, Grupo Investigación Pangea, Colombia), Carlos Piedrahita (Universidad de Medellín, Colombia), Francisco Cabrera (Universidad de Pamplona, Grupo Investigación Pangea, Colombia), Juan Pablo Fernandez, Universidad de Medellín, Colombia.

Copyright 2016, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

*Este texto foi preparado para a apresentação no VII Simpósio Brasileiro de Geofísica, Ouro Preto, 25 a 27 de outubro de 2016. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do VII SimBGf, mas não necessariamente representa a opinião da SBGf ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGf.*

### Abstract

The propagation of seismic wave through viscoelastic media is affected by the attenuation, which is measured by the quality factor Q (inverse of attenuation), results in significant loss of signal strength and bandwidth. Gas trapped in sediments is an example of these media. Seismic images of geological structures underneath shallow gas often suffer from resolution degradation and the effect of amplitude reduction. This makes identification and interpretation difficult. Also this affects the ability to accurately predict reservoir properties. Thus, there is a need to compensate the attenuation due to Q, to be estimated using tomography seismic. This work takes place in a viscoelastic medium in the frequency domain, where the attenuation is incorporated to replace the elastic real parameters by visco-elastic complex parameters, frequency dependent. Consequently the equations are carried in the complex domain and thus a solution should be given in the complex space. A Complex eikonal equation is obtained from the equation of motion in a viscoelastic medium, in the frequency domain. The objective of this work, is to apply a tomographic method to estimate a model of complex velocity and a Q model to achieve an improvement in seismic imaging, in areas where there are strong attenuation factors or fractured media.

### Introducción

Una explosión sísmica consiste en producir ondas para que se propaguen en el subsuelo, parte de esa energía es reflejada y luego recibida en la superficie por dispositivos (geofonos). Cuando una onda viaja por un medio, se necesita de un tiempo para que se desplace de la fuente hacia el receptor, este tiempo es llamado tiempo de propagación. En problemas de inversión es conveniente considerar las inversas de velocidades que son llamadas lentitudes. Los tiempos de tránsito son calculados, solucionando la ecuación Eikonal [Fomel, 2013] que representa una ecuación diferencial parcial no lineal de primer orden para el tiempo de tránsito [Cerveny, 2001]

Las ondas sísmicas se usan para obtener información litológica y propiedades físicas del subsuelo [Toshiki, 1996] para entender la reología y las propiedades internas de la Tierra se hace uso de la atenuación [Pujol,

2003.]. Desde un punto de vista fenomenológico, el efecto de atenuación es una pérdida relativa de los componentes de alta frecuencia de la onda que se propaga, sufriendo una reducción de amplitud. La determinación de la atenuación se basa en la medición de las variaciones de la amplitud, que son altamente dependientes de factores tales como la dispersión geométrica, el efecto de heterogeneidades y presencia de fracturas y fluidos [Pujol, 2003].

Las características de la atenuación sísmica son representadas por el Factor de Calidad Q, [Tohiki, 1996]. El factor Q es una cantidad a-dimensional cuya inversa cuantifica las pérdidas de energía y fue divulgado por Knopoff en 1964 desde la ingeniería de rocas [Barton, 2007].

Para generar una representación de estimaciones de los parámetros del subsuelo se usa una técnica de inversión llamada tomografía, que es una herramienta que permite representar la estructura interna de la Tierra con base en sus propiedades físicas usando datos procedentes de ondas sísmicas.

El objetivo de este trabajo es aplicar un método tomográfico para estimar un modelo de la velocidad complejo y un modelo del factor Q, para lograr una mejora en la imagen sísmica, en zonas donde hay fuertes factores de atenuación o medios fracturados. Se trabajan en un medio viscoelástico y en el dominio de la frecuencia, donde se incorpora la atenuación al reemplazar los parámetros reales elásticos por parámetros complejos visco-elásticos dependientes de la frecuencia. En consecuencia, las ecuaciones están en el dominio complejo y por lo tanto la solución debe buscarse en el espacio complejo.

Para lograr una estimación de Q, inicialmente, se resuelve la ecuación eikonal compleja en un medio viscoelástico utilizando trazado de rayos. La parte real describe la propagación de la onda y su parte imaginaria describe los efectos de la atenuación. Para obtener las estimaciones de las velocidades complejas y de Q; se consideran modelos suaves y heterogéneos, con un gradiente constante del cuadrado de la lentitud. Para este tipo de modelos, una solución exacta de la ecuación Eikonal compleja se puede encontrar analíticamente mediante el trazado de rayos complejo que permite calcular los tiempo de viaje teóricas usando Runge Kutta de cuarto orden y finalmente se produce la inversión, mediante métodos de tomografía de rayos y se ajusta el modelo de velocidad y el modelo de Q, para obtener la mínima diferencia entre los datos observados y los datos teóricos.

**Definición de un Medio Viscoelástico**

Un medio viscoelástico isótropo está definido por dos valores complejos dependientes de la frecuencia, llamados coeficientes de Lamé [Vavrycuk, 2012]

$$\lambda = \lambda^R(\omega) + i\lambda^I(\omega), \quad \mu(\omega) = \mu^R(\omega) + i\mu^I(\omega) \quad (1)$$

las partes reales describen las propiedades elásticas del medio y las partes imaginarias describen la atenuación.

Las velocidades para las ondas P y S son

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2)$$

son complejas y dependientes de la frecuencia.

**Factor de calidad (Q)**

El factor de calidad (Q) es una medida de la propiedad de disipación de la onda que se propaga en el subsuelo. El factor (Q) es utilizado en muchas aplicaciones de la sísmica y está relacionado con la porosidad, la permeabilidad de las rocas, el nivel de saturación y viscosidad del fluido que está atrapado en una roca.

Según Carcione, 2007 Q se define como

$$\langle Q \rangle = \frac{\langle V \rangle}{\langle D \rangle}$$

donde  $\langle V \rangle$  promedio de la densidad de energía de deformación y  $\langle D \rangle$  tiempo promedio de la densidad de la energía disipada, de donde se puede deducir que

$$Q_p = \frac{-\lambda^R + 2\mu^R}{\lambda^I + 2\mu^I} \quad \text{y} \quad Q_s = \frac{-\mu^R}{\mu^I} \quad (4)$$

La disipación también se cuantifica por el factor de calidad cuya inversa es  $Q^{-1}$  llamado el factor de disipación.

**Ecuación de movimiento en Medios Viscoelásticos**

La ecuación de movimiento en medios viscoelásticos se expresa en el dominio de la frecuencia

$$\rho\omega^2 u_i + \sigma_{ij,j} = 0 \quad (5)$$

donde  $\rho$  es la densidad del medio,  $u(x,\omega)$  es el vector desplazamiento,  $\rho\omega^2 u_i + \sigma_{ij,j} = 0$  es el tensor de esfuerzos,  $x$  es el vector de posición,  $\omega$  es la frecuencia.

La densidad  $\rho$ , el vector de posición  $x$  y la frecuencia son cantidades de valores reales, las demás cantidades en la ecuación (5) son complejas. El tensor de esfuerzos es definido en el dominio de la frecuencia como

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \quad (6)$$

donde  $e_{kl} = e_{kl}(x,\omega)$  son componentes del tensor deformación  $e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$  (7)

$c_{ijkl} = c_{ijkl}(x,\omega)$  es el tensor de parámetros viscoelásticos. En medios isótropos  $c_{ijkl}$  es definido usando los coeficientes de lamé  $\lambda$  y  $\mu$  valores complejos y dependientes de la frecuencia

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (8)$$

**Ecuación Eikonal Compleja**

Asumiendo una señal en altas frecuencias con desplazamiento  $u(x,\omega)$  de la siguiente forma

$$u_i(x,\omega) = U_i(x) e^{-\omega\tau^I(x)} e^{i\omega\tau^R(x)} \quad (9)$$

donde  $U = U(x,\omega)$  es la amplitud de valor complejo,  $\tau = \tau(x)$  es el tiempo de tránsito de valor complejo. La parte real de  $\tau^R$  describe el tiempo de propagación de la señal, la parte imaginaria de  $\tau^I$ , describe el decaimiento exponencial de la amplitud de la señal a lo largo del rayo dada la atenuación.

Insertando la ecuación (9) en la ecuación (5) se obtiene la ecuación Eikonal

$$c^2 \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} = 1 \quad (10)$$

donde  $c$  es la velocidad de fase de valor complejo definido en la ecuación (2), el vector posición  $x$  en la ecuación (10) es real. Introduciendo el vector de lentitud  $p$  de valor complejo como

$$p_i = \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \quad (11)$$

la ecuación (10) se puede reescribir como

$$c^2 p_i p_i = 1 \quad (12)$$

donde el vector slowness  $p$  se puede descomponer en sus partes real e imaginara,  $p = p^R + ip^I$  donde

$$p_i^R = \frac{\partial \tau^R}{\partial x_i} \quad p_i^I = \frac{\partial \tau^I}{\partial x_i} \quad (13)$$

define las direcciones de la propagación de la señal y el decaimiento exponencial de la amplitud, respectivamente. La ecuación Eikonal se puede reescribir según (Cerveny 2001) de la forma

$$H(x,p) = \frac{1}{2}(c^2 p_i p_i - 1) = 0 \quad (14)$$

donde  $H = H(x,p)$  es el Hamiltoniano, y los vectores  $x$  y  $p$  son las coordenadas y momentum generalizadas.

### Trazado de Rayos Complejo

La ecuación Eikonal compleja (14) se puede resolver aplicando el método de la características usando la ecuación compleja Hamilton-Jacobi [Cerveny, 2001].

$$\frac{dx_i}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{d\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (15)$$

donde  $\sigma$  es un parametro de valor complejo a lo largo del rayo. Para  $\sigma = \tau$  y  $H$  expresada en la ecuación (14), las ecuaciones de Hamilton-Jacobi dan el siguiente sistema de ecuaciones de trazado de rayos complejas

$$\frac{dx_i}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (16)$$

### Trazado de rayos Viscoelástico

En medios isótropos, las ecuaciones de trazado de rayos son [Vavrycuk, 2008a]

$$\frac{dx_i}{d\sigma} = V^2 p_i^R \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad \frac{d\tau^R}{d\tau} = -\frac{c^I}{c^R} \quad (16)$$

donde  $V$  es el valor real de la velocidad del rayo calculado para la velocidad de fase de valor complejo  $c$  como

$$V = \frac{1}{(c^{-1})^R} \quad (17)$$

Las ecuaciones (16) son usadas para realizar el trazado de rayos.

### Tomografía Sísmica

El objetivo primordial de la tomografía sísmica es tomar un conjunto de datos y producir una imagen [Berryman, 2000], para esto de debe tener en cuenta el modelo, los parámetros del modelo y la respuesta del modelo.

Matemáticamente tiene la representación  $M(s) = t$

donde  $M$  es un operador por lo general no lineal,  $s$  es un vector que representa los parámetros del modelo y  $t$  es un vector, respuesta del modelo.

Un problema directo se formula de la siguiente forma:



y un problema inverso se describe por:



Una forma de solucionar un problema inverso es generar datos sintéticos o datos calculados  $M$  a través de un modelo y se compara con el dato observado  $t_{calc}$

Si la diferencia entre  $t_{obs}$  y  $t_{calc}$  no es significativa el modelo es una buena aproximación. Caso contrario, es recalculado. Este proceso se desarrolla de manera iterativa hasta alcanzar el modelo deseado. Este esquema de inversión se llama inversión basada en modelos. [Menke, 1984].

El dato calculado  $t_{calc}$  es generado a través de un modelo estimado  $s_{est}$  donde  $M(s_{est}) = t_{calc}$ .

Por lo general  $M$  es un operador no lineal y corresponde a la matriz que contiene las longitudes de los rayos en cada celda desde la fuente a los receptor [Berryman, 2000].

Ahora el problema inverso se reduce a determinar el modelo que minimice la diferencia entre los datos observados  $t_{obs}$  y el dato calculado  $t_{calc}$ . La función de diferencia comúnmente es llamada función objetivo, función error o función [Menke, 1984].

### Tomografía Sísmica por Rayos.

La tomografía de rayos sísmicos se usa para determinar la velocidad litológica y es esencial para la inversión del tiempo de propagación, es aplicable en problemas de la industria del petróleo.

Para su implementación se requiere previamente hacer un modelo que represente a las ondas sísmicas viajando a través del subsuelo de una fuente hasta los receptores [Lo and Phili, 1994].

Para poder dar solución al sistema de ecuaciones de la forma  $Ms = t$ , las soluciones basadas en la SVD y regularización de Tikhonov se vuelven poco prácticas debido al costo computacional que la matriz  $G$  implica al ser una matriz dispersa, los métodos para la solución de los sistemas de este tipo de ecuaciones que se basan en factorizaciones de matrices tales como la factorización de Cholesky, factorización QR, o SVD no tienden a trabajar bien con este tipo matrices. En este trabajo se utilizaron los métodos iterativos Kaczmarz, ART (Técnica de reconstrucción algebraica) y SIRT (técnica de reconstrucción iterativa simultanea) que facilitan el trabajo con las matrices dispersas, estos métodos trabajan mediante la generación de una secuencia de modelos  $s$  que convergen a una solución óptima.

### Experimentos Numéricos

Para realizar los ejemplos numéricos se consideran modelos no homogéneos en un medio visco-elástico, con un gradiente constante  $c^{-2}$ .

La velocidad de fase compleja es

$$c^{-2}(x) = c_0^{-2} + A_i x_i \quad (18)$$

donde  $c_0$  es la velocidad inicial y  $A_i$  son los gradientes.

La ecuación Eikonal se resuelve en el plano  $x-z$ , para  $x$  de 0 a 10 km y  $z$  entre 0 y 4 km, el tiempo inicial  $t=0$  la fuente se sitúa en el origen de coordenadas  $x_s=(0,0)$ .

Se considera un modelo de velocidad compleja donde se le aplica gradiente en profundidad.  $c_0=1\text{ km/s}$   
 $A_1=0.01i$   $A_2=A_3=0$ .

La figura (1) muestra la parte real, la parte imaginaria de la velocidad compleja y el modelo de Q.

Para realizar el proceso de inversión se realiza un trazado de rayos para este modelo con un offset de 10 Km y con una profundidad de 4 Km donde se obtienen las trayectorias de cada uno de los rayos, información importante para la construcción de la matriz y los tiempos de propagación.

Para la obtención de este trazado de rayos se solucionan las ecuaciones (16) de trazado de rayo viscoelástico. Los rayos que se muestran en la figura (2) se obtienen al solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales ordinaria haciendo uso del método de Runge Kutta de cuarto orden.

Para entender que tan grande es  $\mathbf{M}$ , consideremos la tomografía para este modelo, donde el modelo de lentitud como se observa en la Figura (2) es una malla de 40 filas por 50 columnas, es decir un total de 2000 celdas, y se registran 112 trayectorias o tiempos de arribo, (cada rayo representa una ecuación) entonces  $\mathbf{M}$  será de 112 filas x 2000 columnas y tendrá 224000 elementos, la mayoría de ellos son nulos, porque cada celda cruza pocas celdas del modelo. Ahora lo que se busca es tener información sobre la trayectoria de cada uno de los rayos lo que ayuda a la recolección de la formación de la matriz  $\mathbf{M}$ , donde principalmente la matriz de trayectorias y celdas, es una matriz de tamaño grande, es no cuadrada, es de rango deficiente y está mal condicionada.

Como modelo inicial para los métodos iterativos Kaczmarz, ART y SIRT se usó una perturbación de los modelos presentados en la Figura (1), la perturbación a los modelos  $C_R$ ,  $C_I$  y  $Q$  es de la forma  $M_{pert}=M+\alpha I_a$  tomando  $\alpha=0.1$  se obtienen los modelos perturbados de velocidad real, imaginaria y de  $Q$ , ver figura (3).

El modelo que se esta analizando tiene velocidad compleja, para obtener la información sobre las trayectorias de los rayos por cada celda, entonces sistema  $\mathbf{M}(\mathbf{s})=\mathbf{t}$  toma la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} M_R & -M_I \\ M_I & M_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_R \\ s_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_R \\ t_I \end{bmatrix} \quad (20)$$

Resolviendo este sistema complejo y aplicando los métodos iterativos, Kaczmarz, ART y SIRT se obtienen los resultados mostrados en la figura ( 4, 5 y 6 ) donde se

puede observar las soluciones para la parte real e imaginaria de la velocidad compleja como tambien la estimación de (Q).

En la figura (7) se muestra el error asociado para el número de iteraciones con cada uno de los métodos iterativos respectivamente.

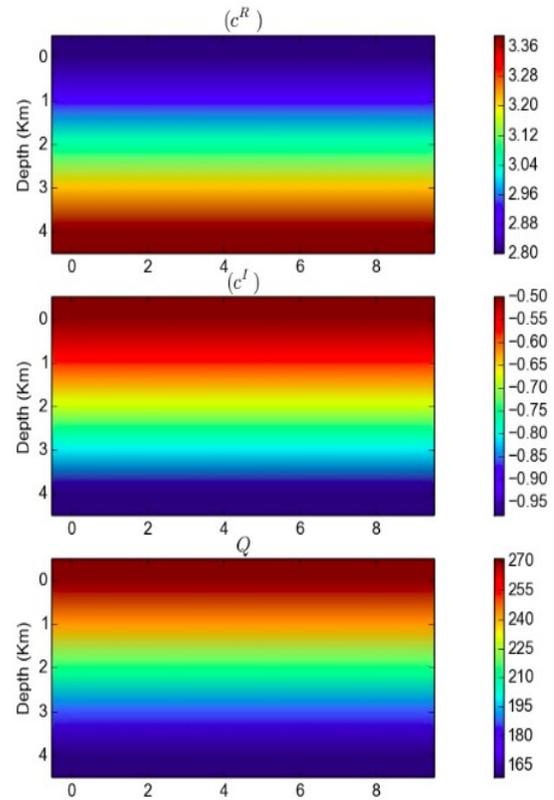


Figura 1. Parte Real, parte imaginaria de la velocidad compleja y Factor Q.

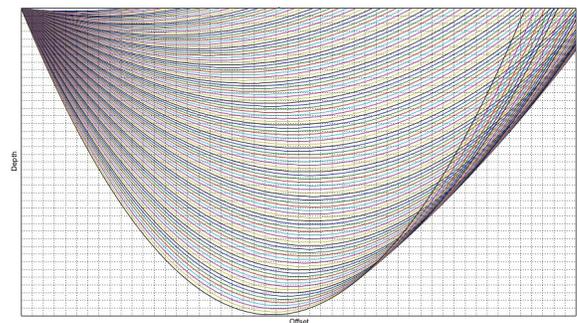


Figura 2. Trazado de Rayos para el modelo de velocidad compleja.

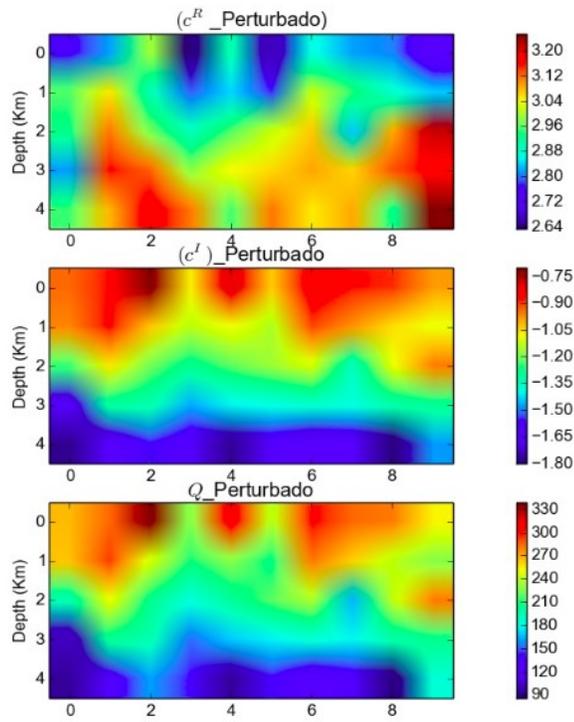


Figura 3. Modelo Perturbado con  $\alpha=0.1$

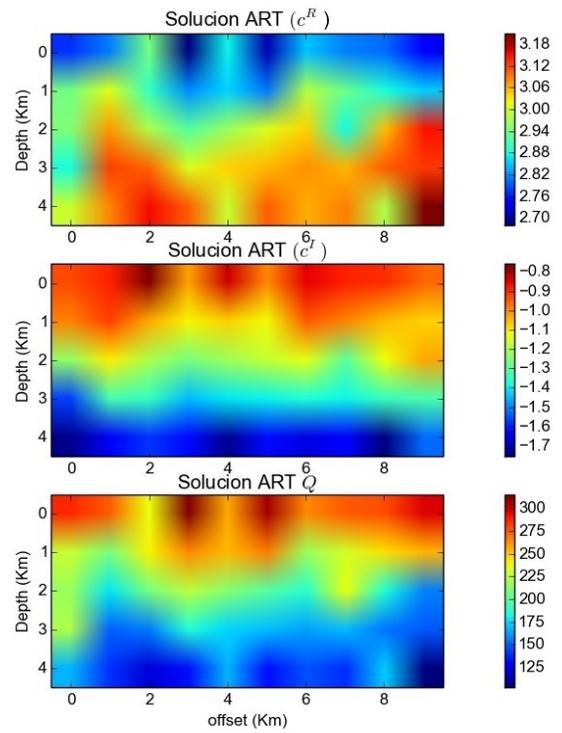


Figura 5. Solución usando método ART.

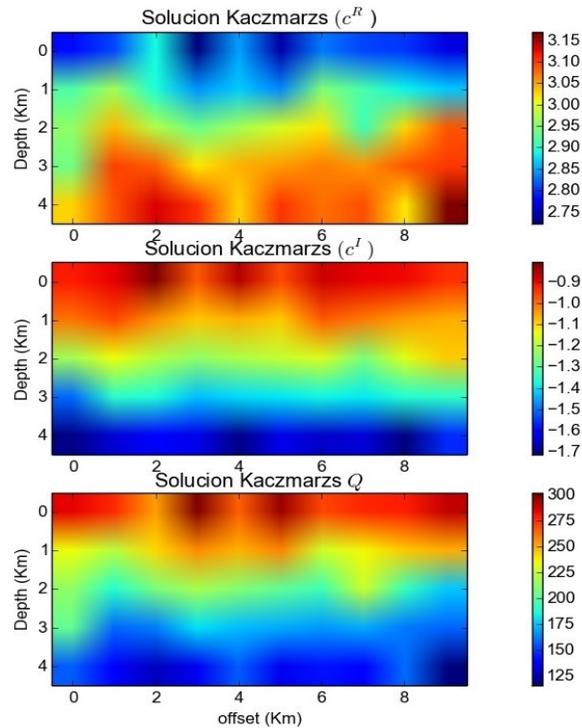


Figura 4. Solución usando método de Kaczmarzs

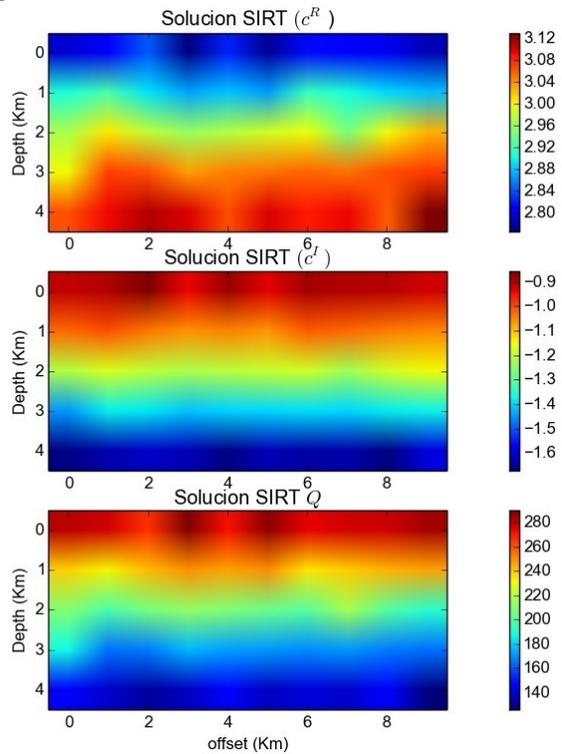
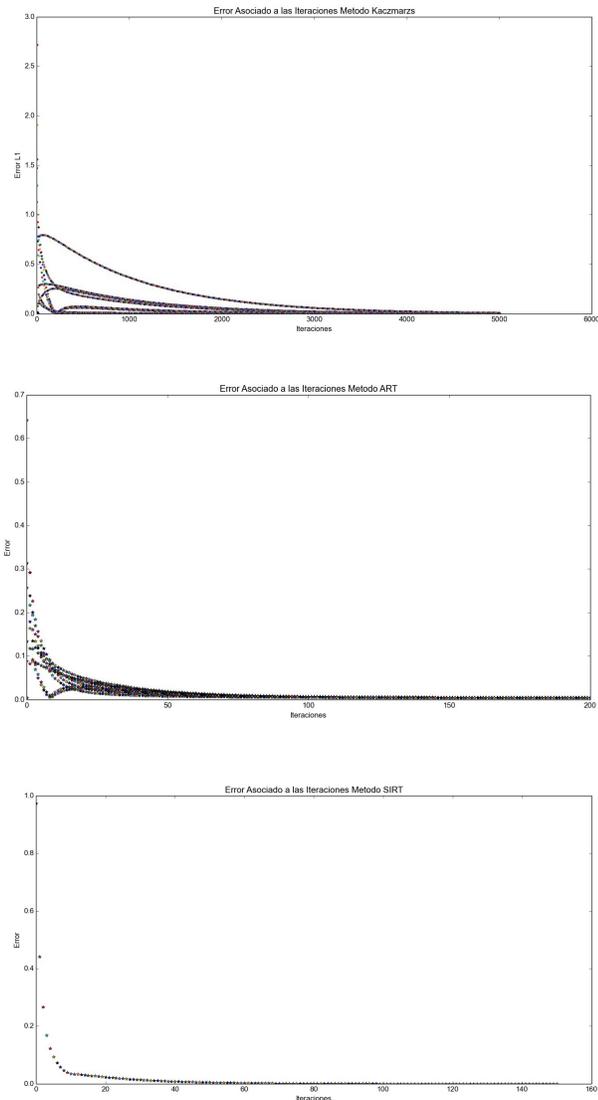


Figura 6. Solución usando método de SIRT



**Figura 7.** Errores asociados a las iteraciones con los métodos iterativos

### Discusiones y Conclusiones

Las soluciones basadas en la SVD y regularización de Tikhonov, factorizaciones QR se vuelven poco prácticas debido al costo computacional que la matriz implica al ser una matriz dispersa. La tomografía sísmica por rayos facilitan el trabajo con las matrices dispersas, el costo computacional se reduce y ayuda que la solución del sistema converja. En el error asociado a las iteraciones con el método Kaczmarz, se observa que en las primeras iteraciones el comportamiento es muy inestable, pero tiende a tener un comportamiento normal después de las 2000 iteraciones, por lo que se puede decir que la convergencia del algoritmo es lenta y no da una muy buena aproximación, respecto a la imagen resultante usando el método ART se observa que tiende a ser más ruidosa comparada con los demás métodos. En el error asociado a las iteraciones tipo SIRT, se observa que el error disminuye rápidamente con las primeras iteraciones

y a partir de la iteración número 60 el error disminuye considerablemente, por lo que se puede decir que la convergencia del algoritmo de SIRT es rápida y el es método que mejor recupera los datos

### Agradecimientos

A las entidades financiadoras **COLCIENCIAS - ECOPETROL** por el desarrollo y ejecución del proyecto 0266-203, al grupo de investigación Pangea de la Universidad de Pamplona y al grupo de Modelación y Computación Científica de la Universidad de Medellín, Colombia.

### Referencias

Keiiti Aki and Paul G. Richards, 2002, Quantitative Seismology Theory and Methods, Freeman, volumen 1.

JAMES G. BERRYMAN, 2000 Analysis of Approximate Inverses in Tomography P. O. Box 808 L-200, Livermore, CA 94551-9900, USA

José M. Carcione, 2007, Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic Anelastic Porous and Electromagnetic Media, Elsevier, volumen 38.

Siwei Li, Alexander Vladimirovsky and Sergey Fomel, 2013 First-break travelttime tomography with the double-square-root eikonal equation, GEOPHYSICS, VOL. 78.

Toshiki Watanabe and Koichi Sassa, 1996, Seismic Attenuation Tomography and its Application to Rock Mass Evaluation. Elsevier Science.

Jose Pujol, 2003, Elastic Wave propagation and generation in seismology, Cambridge University Press, volumen I.

Nick Barton, 2007, Rock Quality, Seismic Velocity, Attenuation and Anisotropy, Taylor and Francis, 2007.

Cerveny Vlastislav, 2001, Seismic Ray Theory, Cambridge University Press.

Carcione, J.M, 1990, Wave propagation in anisotropic linear viscoelastic media: Theory and simulated wavefields: Geophysical Journal International.

Menke, W., 1984, Geophysical data analysis: Discrete inverse theory: Academic Press.

Tien-when Lo and Philip L. Inderwiesen. Fundamentals of seismic Tomography. Society of exploration geophysicists.

Václav Vavrycuk, 2008 Real ray tracing in anisotropic viscoelastic media. GEOPHYSICS.

Václav Vavrycuk, 2008b, Velocity, attenuation, and quality factor in anisotropic viscoelastic media: A perturbation approach. GEOPHYSICS.

Václav Vavrycuk, 2012, On numerically solving the complex eikonal equation using real ray-tracing methods: A comparison with the exact analytical solution. GEOPHYSICS.