



Experimento Numérico em Tomografia de Tempo de Trânsito não Linear: Critérios de Avaliação dos Resultados da Inversão

Silvia Bejarano (IGEO/UFBA), Amin Bassrei (IGEO/CPGG/UFBA)

Copyright 2014, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica
Este texto foi preparado para a apresentação no VI Simpósio Brasileiro de Geofísica, Porto Alegre, 14 a 16 de outubro de 2014. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do VI SimBGf, mas não necessariamente representa a opinião da SBGf ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGf.

Resumo

Neste trabalho avaliamos a qualidade da solução em problemas inversos de Geofísica de Exploração utilizando o método de Decomposição por Valores Singulares num experimento numérico em tomografia de tempo de trânsito não linear. As simulações foram feitas utilizando um modelo sintético, o qual foi discretizado em blocos 2D uniformes, considerando constante a vagarosidade em cada bloco. As inversões foram iterativas e efetuadas com diferentes número de valores singulares, onde em cada situação número de valor singular foi escolhida em função do número de condição associado, assim como também, foi incorporado ruído gaussiano aos tempos de trânsito em diferentes níveis. Para avaliar a qualidade da inversão foi analisado o comportamento da diagonal principal da matriz de resolução de dado e da matriz de resolução de modelo para diferentes número de valores singulares empregados, fornecendo um claro indicador do resultado da inversão. Um segundo critério foi utilizando o conceito de vetor complementar, segundo Barbieri (1974), o processo da inversão pode ser avaliado por uma imagem pseudo-constante, onde pode-se analisar as regiões onde a inversão não foi bem sucedida.

Introdução

A geofísica dedica seus esforços para obter a solução do problema inverso, mas em geral pouca atenção é dada respeito à crítica da solução. Em outras palavras, pouca ênfase é dada a uma análise quantitativa da solução do problema inverso. O objetivo principal do presente trabalho é apresentar diferentes metodologias para avaliar a qualidade da inversão em um problema inverso de tomografia de tempo de trânsito não linear. A tomografia sísmica é um problema inverso que permite estimar uma função a partir de uma integral de linha. Na tomografia de tempo de trânsito a incógnita do problema é a distribuição das vagarosidades, a qual é obtida a partir dos valores do parâmetro de dado, no caso, os tempos de trânsito entre fontes e receptores. Para a obtenção da matriz pseudo-inversa \mathbf{G}^+ , ou, inversa de Moore-Penrose (Penrose, 1955) utilizamos o método da decomposição por valores singulares, ou SVD. Por definição SVD é uma técnica de decomposição de matrizes que consiste em representar qualquer matriz $\mathbf{G}_{M \times N}$ na forma $\mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$, onde $\mathbf{U}_{M \times M}$ e $\mathbf{V}_{N \times N}^T$ são matrizes ortogonais e $\mathbf{\Sigma}_{M \times N}$ é a matriz diagonal

que contém os valores singulares.

Em SVD tem-se que evitar os valores singulares pequenos, para não comprometer os resultados, pois estes valores agem como se fossem ruídos. Portanto, se utilizou o critério dos valores singulares os quais foram dados pelo comportamento de decaimento dos valores singulares, o erro entre os vetores do parâmetro de dado observado e calculado e o erro entre os vetores do parâmetro de modelo verdadeiro e estimado, para assim fazer uma estimativa do número ou região ótima de valores singulares utilizados na inversão segundo Silva e Bassrei (2007). A inversão tomográfica é um problema mal-posto, portanto, foi utilizado um algoritmo iterativo para fornecer uma solução real e também foi introduzido dados contaminados por ruído gaussiano.

No presente trabalho efetuamos uma discretização da região em subsuperfície em blocos 2D retangulares com dimensões conhecidas. A geometria de aquisição de dados é do tipo poço-poço, onde as fontes e os receptores estão distribuídos uniformemente nas laterais de uma malha de 30×20 , ou seja, a área de estudo está localizada entre os dois poços. A utilização de modelos sintéticos é necessária para que possamos determinar o erro, isto é, a diferença entre o vetor de parâmetros de modelo verdadeiro \mathbf{m}^{ver} (modelo sintético) e o vetor de parâmetros de modelo estimado \mathbf{m}^{est} . Este último vetor está associado ao vetor de parâmetros de dado calculado, representado por \mathbf{d}^{calc} . Num conjunto de dados reais não poderíamos fazer tal análise, já que não conhecemos o que realmente há em subsuperfície. Em outras palavras, para um caso real podemos determinar apenas o vetor de parâmetros de modelo estimado.

Usamos nesse trabalho dois critérios para a avaliação do problema inverso. O primeiro critério é a matriz de resolução, conforme definido em Jackson (1972). Quanto mais próxima for a matriz resolução da matriz identidade melhor será a qualidade da inversão. No segundo critério, consideramos que \mathbf{m}^{est} tem um vetor complementar $\mathbf{m}^{est,c}$ no qual as somas destes dois vetores é um terceiro vetor. A soma destes dois vetores será designada por um vetor constante \mathbf{w} , agora temos então duas inversões para executar. A primeira a partir dos dados \mathbf{d}^{obs} e a matriz de coeficientes \mathbf{G} determinamos \mathbf{m}^{est} , por meio do método de inversão SVD, logo, a segunda inversão é feita utilizando o vetor de parâmetros do dados complementar $\mathbf{d}^{obs,c}$ e novamente a matriz \mathbf{G} , obtendo agora o vetor de parâmetros do modelo complementar $\mathbf{m}^{est,c}$, a soma deste dois vetores será o vetor constante \mathbf{w} se o problema inverso for exato. Esse critério foi sugerido por Barbieri (1974).

Tomografia Sísmica

A tomografia é uma técnica de reconstrução de imagem, a partir das somas dos valores das propriedades em determinadas direções Lo e Inderwisen (1994). Pode ser classificada de acordo com o tipo de dado que é usado na inversão. Se o dado utilizado é o tempo de percurso entre a fonte e o receptor, então se tem tomografia de tempo de trânsito que é uma abordagem cinemática. Caso o dado utilizado seja a forma da onda registrada então é tomografia de difração que é uma abordagem dinâmica. O presente trabalho utiliza tomografia de tempo de trânsito, que é assim chamada porque utiliza o tempo de trânsito entre fontes e receptores. O tempo de trânsito de um determinado raio por um percurso r é dado por:

$$t = \int_r s(x, z) dl, \quad (1)$$

onde t é o tempo de trânsito, r é a trajetória do raio ao longo do qual é realizada a integração, $s(x, z)$ é o vetor da vagarosidade do meio no ponto (x, z) (x e z , representam, respectivamente, as coordenadas horizontal e vertical) e dl é um elemento do percurso do raio. Pelo princípio de Fermat o caminho do raio será aquele para o qual a integral acima é um valor estacionário.

Temos que a equação para o tempo de trânsito é não-linear, ou seja, o raio ao percorrer meios homogêneos comporta-se como sendo reto, porém ao percorrer meios em que existem contrastes de velocidades o novo caminho descrito será curvo. Logo, para contornar o problema devemos realizar uma linearização, o que é feito pela expansão do tempo de trânsito, $\mathbf{t}_r = g[\mathbf{s}(x, z)]$, utilizando a expansão em série de Taylor em torno do ponto \mathbf{s}^0 e ignorando os termos de ordem maior ou igual a dois temos:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^0 + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{s}} (\mathbf{s} - \mathbf{s}^0), \quad (2)$$

ou

$$\Delta \mathbf{t}_i = \mathbf{G} \Delta \mathbf{s}_i, \quad (3)$$

onde o vetor $\Delta \mathbf{t}_i$ é o resíduo temporal que corresponde às diferenças entre os tempos de trânsito calculados e os tempos de trânsito observados para o modelo; o vetor $\Delta \mathbf{s}_i$ corresponde às diferenças entre as vagarosidades do modelo inicial e as vagarosidades verdadeiras; a matriz \mathbf{G} contém os elementos g_{ij} que correspondem às distâncias que o j -ésimo raio percorre no i -ésimo bloco, sendo $s_i = 1/v_i$ onde v_i é a velocidade em cada bloco.

As equações que descrevem a tomografia de tempo de trânsito, aproximada por um modelo linear, podem então ser formuladas como: $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$ ou utilizando uma notação mais específica:

$$\mathbf{t} = \mathbf{G}\mathbf{s}, \quad (4)$$

sendo, \mathbf{t} é o vetor de tempos de trânsito, que corresponde ao vetor de dados observados \mathbf{d} ; \mathbf{G} é a matriz núcleo, a qual descreve a geometria dos raios; \mathbf{s} é o vetor de

vagarosidade (inverso da velocidade), que representa os parâmetros do modelo \mathbf{m} a serem determinados.

O percurso do raio da fonte ao receptor é dado pelos elementos da matriz \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{M1} & g_{M2} & \cdots & g_{MN} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

onde M é o número total de raios = número de fontes \times número de receptores; N é o número de blocos na qual a área em estudo foi dividida.

Portanto cada linha de \mathbf{G} corresponde ao percurso de um raio. A matriz \mathbf{G} é esparsa pois um dado raio intercepta apenas uma pequena parte do modelo. Utilizando um modelo linear da subsuperfície, a reconstrução tomográfica pode então ser obtida através da resolução de um sistema linear de equações. Os métodos de resolução de sistemas lineares baseados em inversão de matrizes têm como vantagens o fato de que qualquer arranjo emissor-receptor pode ser tratado facilmente e não ser necessário adotar uma forma simples de trajetória dos raios. A principal desvantagem é que estes métodos são lentos e em alguns casos podem se tornar inviáveis na solução de problemas com grande número de parâmetros.

O procedimento de inversão neste trabalho como foi dito na introdução é executado pela decomposição por valores singulares, ou SVD. Os problemas inversos geofísicos lineares ou linearizados podem ser facilmente representados por um sistema linear de equações $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$ Menke (1986), por definição SVD é uma técnica de decomposição de matrizes que consiste em calcular a matriz inversa generaliza $\mathbf{G}_{N \times M}^+$ da matriz $\mathbf{G}_{M \times N}$. A matriz retangular $\mathbf{G}_{M \times N}$, com posto k , pode ser decomposta na forma $\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$, onde $\mathbf{U}_{M \times M}$ e $\mathbf{V}_{N \times N}^T$ são matrizes ortogonais e $\mathbf{\Sigma}_{M \times N}$ é a matriz diagonal que contém os valores singulares (σ) de \mathbf{G} , dispostos em ordem decrescente, isto é, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$. A inversa generalizada Penrose (1955) é expressa por $\mathbf{G}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^T$, onde $\mathbf{\Sigma}_{N \times M}^+$ é a matriz que contém os recíprocos dos valores singulares não-nulos de \mathbf{G} .

Seleção de Valores Singulares

Foram aplicados critérios para fazer uma seleção do número de valor singular a ser utilizados na inversão com SVD, isso devido ao fato que os valores singulares σ são calculados em forma decrescente, podendo chegar a valores tão pequenos que distorcem a solução do problema. Temos então:

Amplitude dos valores singulares. Os valores singulares (σ) de uma matriz são os valores das raízes quadradas dos autovalores do produto dessa matriz pela sua transposta, porém, agregando informação importante para a construção da matriz generalizada. O programa SVD permite obter esses valores em ordem decrescente, não obstante, a partir de certo valor, essa informação passa a ser considerado ruído e compromete a qualidade da inversão.

Adição de ruído. Foram realizadas simulações com dados contaminados por ruído gaussiano, introduzindo assim diferentes níveis de ruído para verificar o comportamento das inversões em função das vagarosidades. A adição de ruído se deu pela expressão:

$$d_j^* = d_j(1 + \alpha r_j), j = 1, \dots, M. \quad (6)$$

onde d_j^* representa o j -ésimo elemento do vetor de parâmetros de dado contaminado com ruído, d_j representa o j -ésimo elemento do vetor de parâmetros de dado livre de ruído, α é a amplitude de ruído aplicado e r_j é o j -ésimo elemento de uma sequência quase aleatória de números. Pode-se calcular o erro entre o valor do dado contaminado com ruído e livres de ruído, por meio da seguinte equação:

Erro do dado. A partir da análise dos resultados podemos quantificar em termos de porcentagem a diferença entre os tempos de trânsito observados e os calculados, esse erro é expresso a seguir:

$$\varepsilon_d = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^M (t_i^{obs} - t_i^{cal})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^M (t_i^{obs})^2}} \times 100\% \quad (7)$$

onde M é o número de raios (número de fontes \times receptores), t_i^{obs} são os tempos de trânsito observados, e t_i^{cal} são os tempos de trânsito calculados.

Erro do modelo. É a diferença entre as vagarosidades verdadeiras e estimadas do modelo, em termos de porcentagem esse erro é expresso como:

$$\varepsilon_m = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (s_i^{ver} - s_i^{est})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (s_i^{ver})^2}} \times 100\% \quad (8)$$

onde N é o número de blocos da malha, s_i^{ver} são as vagarosidades verdadeiras, e s_i^{est} são as vagarosidades estimadas.

Matrizes de Resolução

Conforme mencionado na introdução para efetuarmos uma análise quantitativa da solução do problema inverso utilizamos o critério da matriz de resolução. Quanto mais próxima for a matriz de resolução da matriz identidade melhor será a qualidade da inversão Jackson (1972). Existem duas matrizes de resolução, a matriz de resolução do modelo é a matriz que caracteriza a relação entre os parâmetros do modelo estimado e os parâmetros do modelo verdadeiro (Menke, 1986). A matriz depende da estrutura do problema (geometria dos modelos e dos experimentos) e de alguma informação *a priori*. A principal utilidade da matriz resolução é fornecer uma medida da resolução obtida a partir dos dados e esta medida é baseada no grau em que a matriz de resolução é aproximada da matriz identidade (Jackson, 1972).

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^+ \mathbf{d}^{obs} = \mathbf{G}^+ [\mathbf{G} \mathbf{m}^{ver}] = R_m \mathbf{m}^{ver},$$

$$R_m = \mathbf{G}^+ \mathbf{G},$$

Por seu turno, a matriz de resolução de dado é a matriz que caracteriza a relação entre os dados observados e os dados calculados com um modelo dado (Menke, 1986). Esta matriz descreve até que ponto as previsões correspondem aos dados. A matriz resolução de dados é determinada só pelos dados do kernel e uma informação *a priori* adicionada ao problema.

$$\mathbf{d}^{cal} = \mathbf{G} \mathbf{m}^{est} = \mathbf{G} [\mathbf{G}^+ \mathbf{d}^{obs}] = R_d \mathbf{d}^{obs},$$

$$R_d = \mathbf{G} \mathbf{G}^+,$$

Para realizar um estudo quantitativo do problema inverso foram feitas medições dos percentuais dos erros da diagonal principal da matriz de resolução de dados ε_{Rd} e o erro da diagonal principal da matriz de resolução de modelo ε_{Rm} , estes erros são expressos, respectivamente, como:

$$\varepsilon_{Rd}(\%) = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{j=1}^M (1 - R_{d,jj})^2} \times 100 \quad (9)$$

$$\varepsilon_{Rm}(\%) = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (1 - R_{m,ii})^2} \times 100 \quad (10)$$

Método de Barbieri

O segundo método foi sugerido por Barbieri (1974) é utilizado em tomografia médica. Considere que \mathbf{m}^{est} , solução de um problema inverso, tem um vetor complementar $\mathbf{m}^{est,c}$, de modo que a soma destes dois vetores é um vetor constante dado por \mathbf{w} . Podemos trabalhar tanto com vetores ou com matrizes de forma que:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &\iff M, \\ \mathbf{m}^c &\iff M^c, \\ \mathbf{w} &\iff W, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{m} + \mathbf{m}^c = \mathbf{w}, \quad (11)$$

ou

$$M + M^c = W. \quad (12)$$

Neste último caso W é uma matriz constante, dado por $W = (w_0)$; $w_0 \geq \max(m_i)$. A partir de \mathbf{d}^{obs} e \mathbf{G} determinamos \mathbf{m}^{est} por qualquer método de inversão, no caso deste trabalho será por SVD. Depois calculamos o vetor complementar dos parâmetros de dado observados usando a relação $\mathbf{d}^{obs,c} = \mathbf{G} \mathbf{w} - \mathbf{d}^{obs}$. Uma segunda inversão é efetuada obtendo agora o vetor complementar dos parâmetros de modelo $\mathbf{m}^{est,c}$. De posse dessas duas soluções, \mathbf{m}^{est} e $\mathbf{m}^{est,c}$, efetuamos então a soma:

$$\mathbf{w}^{est} = \mathbf{m}^{est} + \mathbf{m}^{est,c}. \quad (13)$$

Esse resultado será $\mathbf{w}^{est} = \mathbf{w}$, se o problema inverso for exato. Como geralmente isso não ocorre, podemos

verificar em quais regiões do modelo a inversão teve êxito. Portanto, temos uma clara visão se o método de inversão utilizado foi efetivo ou não, seja no modelo como um todo ou em partes do modelo Basserri (2000). Se realizo um estudo quantitativo dos percentagem dos erros entre o vetor constante \mathbf{w} e o vetor \mathbf{w}^{est} , pela seguinte equação:

$$\varepsilon_w(\%) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (w_i - w_i^{est})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (w_i)^2}} \times 100. \quad (14)$$

Simulações em Tomografia de Tempos de Trânsito

O modelo sintético utilizado foi discretizado em 600 blocos, onde cada bloco tem um comprimento de 30m e de altura 20m, como resultado as dimensões totais da região de interesse são 600m de extensão horizontal por 400m de profundidade a partir da superfície, conforme pode ser observado na Figura 1. A principal característica é uma camada que tem uma velocidade de propagação de 4600m/s. O modelo possui duas camadas horizontais respectivamente de cima para baixo com velocidades de 4000m/s e 3400m/s, a camada principal está incorporada em três camadas horizontais com velocidades 4300m/s, 3400m/s e 4300m/s respectivamente.

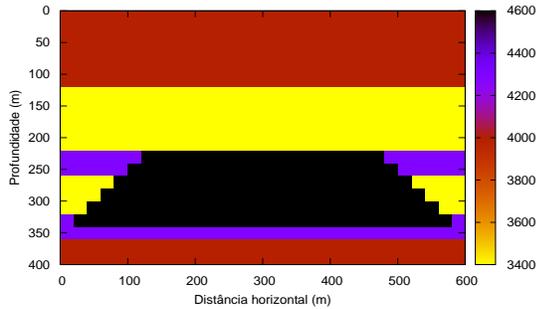


Figura 1: Modelo verdadeiro.

A geometria de aquisição de dados é do tipo poço-poço, onde as fontes e os receptores estão distribuídos uniformemente nas laterais de uma malha de 30x20, ou seja, a área de estudo está localizada entre os dois poços. Foram consideradas três situações na geometria de aquisição, primeiro como 20 fontes e 20 receptores uniformemente distribuídos em dois poços alinhados nas extremidades laterais da malha dessa forma, o número de raios é 400 correspondente a um problema subdeterminado, depois, foi analisado com 25 fontes e 24 receptores, portanto, o número de raios é 600, correspondente a um problema determinado e posteriormente foi considerado 30 fontes e 30 receptores, como consequência o número de raios foi de 900, o qual corresponde a um problema sobredeterminado. As inversões foram iterativas, com um modelo inicial constante igual a 5000m/s, obtendo resultados satisfatórios já na segunda iteração, estas inversões foram realizadas em três situações diferentes, onde em cada caso mudava a quantidade utilizada de valores singulares, portanto, em cada caso havia um determinado número de condição (NC). Esse indicador é expresso pela relação $NC = \sigma_{max}/\sigma_{min}$, onde σ_{max} é

constante e σ_{min} é diferente em cada situação. Para a realização desse trabalho o NC é o mesmo em os três casos, obviamente, o número de valores singulares é diferente.

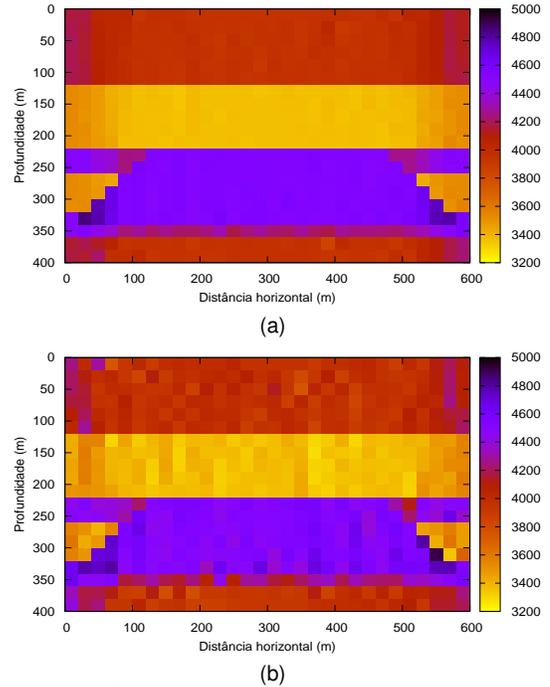


Figura 2: Modelos estimados caso determinado com 529 valores singulares (a)Primeira iteração (b) Segunda iteração.

Fazendo uma análise da curva decrescente dos valores singulares (σ) podemos obter informação do valor singular limite utilizado para não comprometer a inversão, dado que, a partir de certo valor, essa informação passa a ser considerado ruído e compromete a qualidade da mesma. Foram realizadas simulações com dados livres de ruído, assim como com dados contaminados por ruído gaussiano os quais foram calculadas pela Equação 6. Foram introduzidos nas simulações três diferentes níveis de ruído, de acordo os seguintes valores de α : 0,01; 0,005; 0,001 e 0,0.

Foram realizadas varias simulações para os diferentes números de valores singulares σ e para os diferentes nível de ruído dado pelo parâmetro α , onde para cada um foi calculo o percentual do erro do dado $\varepsilon_d(\%)$ Equação 7 e o percentual do erro do modelo $\varepsilon_m(\%)$ Equação 8, cujos resultados estão condensados na Tabela 1. Nesta Tabela podemos observar que o valor do percentual do erro ε_d aumenta quando se aumenta o nível de ruído, o qual é coerente. Por sua vez o resultado do erro do modelo indicou que o valor de ε_m é estável até aproximadamente 110 no caso subdeterminado, 544 no caso determinado e 559 no caso sobredeterminado, um resultado da inversão pode ser observado na Figura 2, onde se representa uma inversão feita com um $NC = 1 \times 10^2$, para a primeira e segunda iteração do problema determinado observando uma razoável melhora no resultado da inversão.

Por limitação de espaço mostramos as figuras só em este exemplo, mas, as simulações feitas com os outros valores deram como resultado que para obter uma inversão

α	Subdeterminado			Determinado			Sobredeterminado		
	σ	$\varepsilon_m(\%)$	$\varepsilon_d(\%)$	σ	$\varepsilon_m(\%)$	$\varepsilon_d(\%)$	σ	$\varepsilon_m(\%)$	$\varepsilon_d(\%)$
0,0	110	37,852	8,615	444	2,513	9,322	486	2,401	1,028
	199	38,222	8,819	529	1,944	6,837	559	1,893	$1,536 \times 10^{-3}$
	201	–	–	544	1,969	4,905	561	1,910	$1,519 \times 10^{-3}$
0,001	110	37,886	8,609	444	2,563	1,894	486	2,437	1,768
	199	38,350	8,834	529	2,775	$1,780 \times 10^{-2}$	559	2,304	$1,590 \times 10^{-2}$
	201	–	–	544	8,905	$1,806 \times 10^{-2}$	561	2,339	$1,590 \times 10^{-2}$
0,005	110	37,886	8,606	444	3,564	8,296	486	3,196	$7,266 \times 10^{-2}$
	199	–	–	529	10,178	8,905	559	6,898	$7,927 \times 10^{-2}$
	201	–	–	544	51,989	9,028	561	7,041	$7,950 \times 10^{-2}$
0,01	110	37,925	8,061	444	5,642	0,165	486	4,859	0,144
	199	38,560	8,857	529	20,097	0,178	559	13,421	0,158
	201	–	–	544	–	–	561	–	–

Tabela 1: Erro do modelo ε_m , erro do dado ε_d para o problema subdeterminado, determinado e sobredeterminado. Para a segunda iteração.

satisfatória o valor de ε_m tem que ser $< 10\%$.

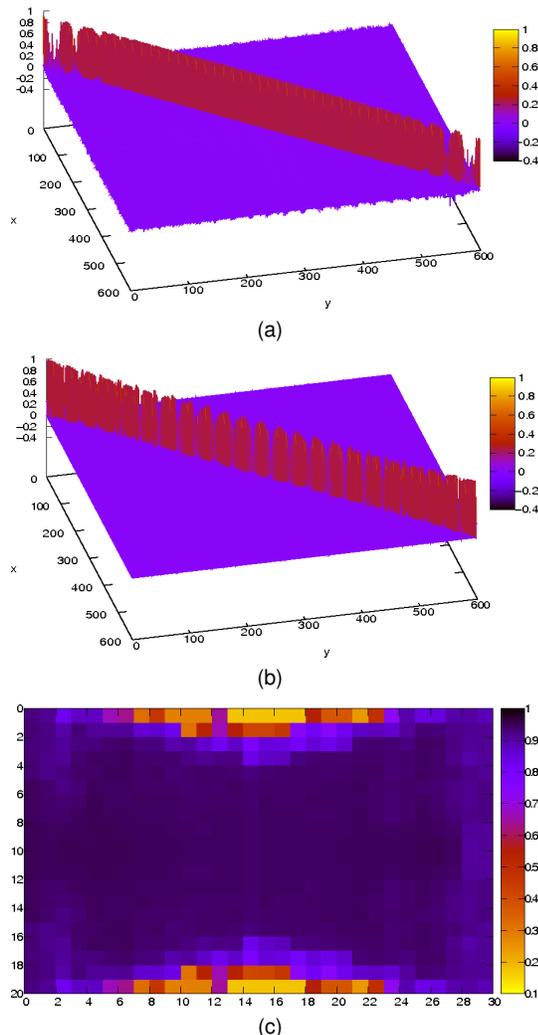


Figura 3: (a) Matriz de resolução de dados. (b) Matriz de resolução de modelo. (c) Diagonal principal da matriz de resolução do modelo, para a segunda iteração do caso determinado com 529 valores singulares.

Na Figura 3 é representada a matriz de resolução de dado e a matriz de resolução de modelo para um problema determinado com 529 valores singulares, observando como a diagonal principal das duas matrizes vão se aproximando de 1. Os resultados das percentuais dos erros da diagonal principal da matriz de resolução de dados ε_{Rd} Equação 9 e o erro da diagonal principal da matriz de resolução de modelo ε_{Rd} Equação 10 para os diferentes NC tanto do modelo determinado como sobredeterminado são mostrados na Tabela 2, temos então que a medida que é utilizado um valor singular ótimo a diagonal principal da matriz de resolução de dado e de modelo vão se aproximando de um, o qual, da como resultado uma inversão sucedida. Tomando em consideração que o NC representa quão estável é a inversão podemos dizer que o valor adequado do NC se encontra nas vizinhanças de 1×10^2 , tanto para o problema determinado como sobredeterminado, para o problema subdeterminado o NC satisfatório esta em torno de 1×10^1 . Fazendo uma comparação dos erros das matrizes ε_{Rd} e ε_{Rm} na tabela é possível verificar que a matriz de resolução de dado no problema subdeterminado é mais próxima de um que no problema determinado e subdeterminado, mesmo utilizando igual número de condição, situação contraria acontece com a matriz de resolução de modelo, que é mais próxima de um no problema determinado que no problema subdeterminado e sobredeterminado.

Na Tabela 2 estão representados também os valores percentuais do erro ε_w dado pela Equação 14, nesta pode ser observado que os valores do erro para o caso determinado e sobredeterminado diminui com ou aumento do número de condição, como resultado a soma dos vetores \mathbf{m}^{est} e $\mathbf{m}^{est,c}$ vão se aproximando cada vez mais ao valor constante \mathbf{w} , na inversão efetuada foi tomado o valor constante $\mathbf{w} = 5000$. Estes resultados podem ser visualmente mais detalhados nos gráficos, mas por limitações de espaço mostramos apenas os resultados dos erros percentuais e uma representação grafica na Figura 4, onde pode-se observar que a soma entre o \mathbf{m}^{est} e $\mathbf{m}^{est,c}$ da um vetor constante \mathbf{w} , para um problema determinado, indicando as regiões onde a inversão não foi bem sucedida. Comparando os resultados das inversões por médio dos critérios das matrizes de resolução e o

Subdeterminado				Determinado				Sobredeterminado			
σ	$\epsilon_{Rd}(\%)$	$\epsilon_{Rm}(\%)$	$\epsilon_w(\%)$	σ	$\epsilon_{Rd}(\%)$	$\epsilon_{Rm}(\%)$	$\epsilon_w(\%)$	σ	$\epsilon_{Rd}(\%)$	$\epsilon_{Rm}(\%)$	$\epsilon_w(\%)$
110	3,385	3,897	47,607	444	1,285	1,280	$4,027 \times 10^{-2}$	486	1,025	1,628	4,686
199	2,887	3,603	57,872	529	0,806	0,789	0,205	559	0,447	1,414	0,159
201	2,398	3,467	67,712	544	0,728	0,682	0,695	561	0,432	1,410	0,334

Tabela 2: Erro da matriz de resolução de dado ϵ_{Rd} , erro da matriz de resolução de modelo ϵ_{Rm} e erro da seção pseudo-constante ϵ_w . Para a segunda iteração.

método de Barbieri, temos que nos dois casos podemos fazer uma adequada avaliação da inversão efetuada. Estes resultados podem ser visualmente mais detalhados nas gráficas, mas por limitações de espaço mostramos apenas os resultados dos erros percentuais menores.

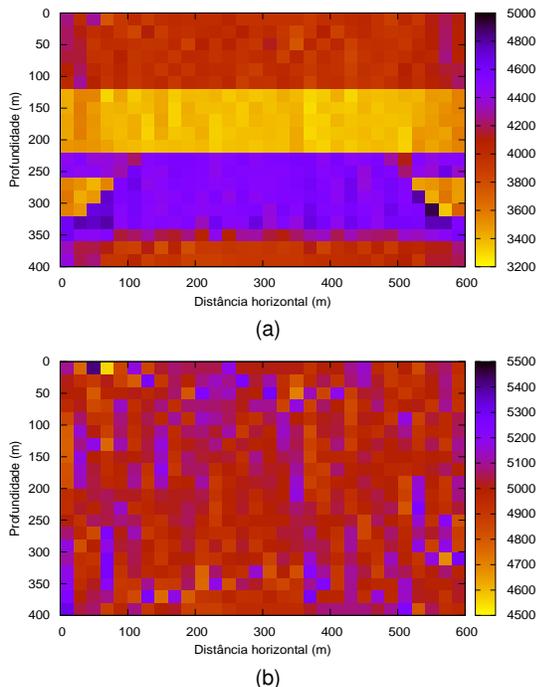


Figura 4: Resultado do caso determinado para a segunda iteração (a) Modelo estimado, (b) Vetor pseudo-constante $w = 5000$.

Discussão e Conclusões

A presença de pequenos valores singulares na inversão gera um crescimento anômalo em os critérios de erro do parâmetro do modelo e erro do parâmetro do dado, como também nos erro da diagonal da matriz de resolução de modelo, a matriz de resolução de dado e o erro do vetos constante w , portanto, é utilizado critérios para analisar em quais região o número de valor singular é ótimo. A utilização de diferentes níveis de ruído revelou que para $\alpha > 0,01$ a inversão não foi ótima e para valores menores de $\alpha < 0,01$, proporciona uma validade já que os erros ϵ_d e ϵ_m dão valores considerados satisfatórios, como pode ser observado na Tabela 1.

Os resultados da matriz de resolução de dado e a matriz de resolução de modelo foram com o valor da matriz G na segunda iteração, podendo verificar as regiões onde a inversão não teve sucessos e como ela

melhora com a utilização de um número ótimo de valor singular, observado na Tabela 2 e verificado nas diferentes simulações geradas. Da mesma forma para verificar a qualidade da inversão foi aplicado o método de Barbieri utilizando o resultado do modelo estimado na segunda iteração. Temos então que a soma dos vetores m^{est} e $m^{est,c}$ se aproxima de um valor pseudo-constante w , e como resultado, pode-se observar e avaliar a qualidade da inversão realizada, o qual é confirmado com os valores percentuais.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FINEP pelo apoio à Rede Cooperativa de Pesquisa em Geofísica de Exploração (Rede 01 – Fases 3 e 5), à PETROBRAS pela cessão dos dados reais utilizados neste trabalho (Rede 01 – Fase 2), e ao CNPq e PETROBRAS pelo apoio ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Geofísica de Petróleo (INCT-GP). Silvia Bejarano agradece a CAPES pela bolsa de doutorado. A. Bassrei agradece ao CNPq pelos projetos 307.427/2010-2 e 308.690/2013-3 (bolsa de produtividade de pesquisa),

Referências

- Barbieri, M. (1974) A criterion to evaluate three dimensional reconstructions from projections of unknown structures, *Journal of Theoretical Biology*, **48**: 451-467.
- Bassrei, A. (2000) Novel approaches for the solution and solution evaluation of linear and non-linear inverse problems in geophysics. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional*, **4**:1-7.
- Jackson, D. D. (1972) Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **28**: 97-109.
- Lo, T. e Inderwiesen, P. (1994) *Fundamentals of Seismic Tomography*. Geophysical Monograph Series. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists.
- Menke, W. (1986) *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*, Academic Press, Orlando, FL.
- Penrose, R. (1955) A generalized inverse for matrices, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **51**:406-413.
- Silva, J. e Bassrei, A. (2007) Critérios de seleção de valores singulares em problemas inversos lineares: uma aplicação em tomografia acústica de tempo de trânsito. *Sitientibus Série Ciências Físicas*, **03**: 32-48.