



# Propagação da onda acústica em meios VTI

Alex Muniz Rodrigues\*; Leandro Di Bartolo; Naydeo Pontes. Observatório Nacional / MCTI

Copyright 2014, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

Este texto foi preparado para a apresentação no VI Simpósio Brasileiro de Geofísica, Porto Alegre, 14 a 16 de outubro de 2014. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do VI SimBGf, mas não necessariamente representa a opinião da SBGf ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGf.

## Abstract

In this work, we study wave propagation in anisotropic media with VTI symmetry using finite-difference pseudo-acoustic algorithm, applying it to RTM migration. We have implemented Alkhalifah's formulation as much as the VTI elastic staggered-grid formulation. The results of RTM using pseudo-acoustic formulation in VTI media are preliminary, being the research in development. As numerical examples, it is presented a direct modeling in Hess VTI model and an RTM migration showing the first results of our RTM migration algorithm, where a single shot is migrated for a simple model of horizontal layers.

## 1. Introdução

A modelagem numérica da propagação de ondas sísmicas desempenha um papel importante na exploração de Petróleo e Gás e, com o passar dos anos, vem se tornando cada vez mais central o seu papel no processamento de dados sísmicos. Exemplos atuais desta importância são encontrados na migração reversa no tempo (RTM), proposta por Baysal et al. (1983) entre outros – um método poderoso na migração sísmica que utiliza a equação completa da onda – bem como a inversão completa do campo de onda (FWI), um dos temas de maior interesse na atualidade.

Na RTM o campo de onda registrado pelos geofones (ou hidrofones) é propagado no sentido inverso do tempo utilizando a equação completa da onda, para isso aplica-se uma condição de imagem para gerar um mapa de refletores. Sendo assim, a RTM é adequada para regiões com alto grau de complexidade geológica, sem restrição quanto a variação lateral de velocidades e o mergulho dos refletores. O sucesso da RTM se destaca pela possibilidade de reposicionar o campo de onda registrado sem lançar mão de nenhuma aproximação, sendo utilizada a equação completa da onda.

Tradicionalmente, a RTM utiliza a equação acústica da onda, embora a princípio a RTM possa se basear tanto na teoria acústica quanto na elástica, esta última podendo ser naturalmente estendida para meios anisotrópicos. Na RTM elástica utilizam-se as equações elásticas da onda, o que torna o processo mais caro computacionalmente. Para implementar a RTM elástica, é necessário ainda separar o campo de onda P (primária) e o campo de onda S (secundária) para aplicar a

condição de imagem, o que encarece ainda mais o processo. A RTM acústica, por outro lado, é um procedimento bem estabelecido e muito mais eficiente computacionalmente, onde se trabalha apenas a onda P. No entanto, como são bem conhecidos, as rochas que formam as bacias sedimentares são anisotrópicas (suas propriedades elásticas variam com a direção), sendo na maioria das vezes seu comportamento bem descrito com a simetria VTI (*Vertical Transverse Isotropic*), onde o eixo de simetria é vertical, ou ainda como TTI (*Tilted Transverse Isotropic*), onde o eixo de simetria é inclinado. No caso VTI, os modos de onda quase-P e quase-S apresentam-se acoplados, considerando-se as equações elásticas da onda correspondentes. Assim, na migração RTM correspondente, é necessário realizar a separação dos modos de onda, que, além de tornar o processo menos eficiente, se constitui em um problema adicional, no caso anisotrópico, sendo este um tema em aberto de pesquisa onde vários processos de separação já foram propostos.

Por outro lado, as chamadas equações pseudo-acústicas e acústicas VTI tem se destacado como alternativas eficientes para modelar apenas o modo de onda quase-P. Tais equações têm sido extensivamente utilizadas tanto para RTM como para FWI, de forma muito eficiente. Uns dos primeiros trabalhos a propor uma equação pseudo-acústica é do Alkhalifah (2000), obtida realizando-se a transformada inversa de Fourier na relação de dispersão analítica para meios VTI, considerada com a velocidade de propagação de ondas S igual a zero na direção vertical. A equação pseudo-acústica resultante é assim chamada uma vez que ainda apresenta eventos relacionados com onda S, mas este não é um problema no contexto do imageamento. Outras equações pseudo-acústicas têm sido obtidas desde então, sendo algumas delas equivalentes.

Neste trabalho, implementamos a modelagem pseudo-acústica utilizando a equação original de Alkhalifah (2000), apresentando os resultados da modelagem no modelo Hess VTI e, ainda, apresentamos os resultados preliminares da aplicação desta formulação para o imageamento, utilizando a migração RTM, o algoritmo implementado utiliza a condição de imagem de tempo de excitação. Na seção seguinte, iniciamos pela apresentação das equações que descrevem a propagação de ondas em meios VTI.

## 2. Equações de Propagação de ondas em meios VTI

Nesta seção, antes de apresentarmos as equações que descrevem a propagação de ondas sísmicas em meios VTI em duas dimensões, descrevemos os parâmetros de anisotropia envolvidos nestas equações.

## 2.1 Tensor de elasticidade: parâmetros de Thomsen e Alkhalifah

A anisotropia de um meio VTI é descrita pelo tensor de elasticidade do meio, que pode ser escrito em notação de Voigt através da seguinte matriz (em 2D):

$$c_{nm} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{55} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Thomsen (1996) fez a introdução de parâmetros que descrevem a anisotropia VTI do meio, com uma interpretação física clara, definidos como:

$$\epsilon = \frac{c_{11} - c_{33}}{2c_{33}} \quad (2)$$

$$\delta = \frac{(c_{13} + c_{55})^2 - (c_{33} + c_{55})^2}{2c_{33}(c_{33} + c_{55})} \quad (3)$$

Em conjunto com as velocidades de onda quase-P e quase-S na direção vertical,  $V_{pz}$  e  $V_{sz}$ , os parâmetros de Thomsen descrevem completamente as propriedades elásticas necessárias para descrever a propagação de ondas em meios VTI 2D:

$$V_{pz} = \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}} \quad (4)$$

$$V_{sz} = \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}} \quad (5)$$

Os parâmetros de Thomsen quantificam propriedades importantes, onde  $\epsilon$  representa o grau de anisotropia da onda primária e  $\delta$  representa a dependência angular da frente de onda P nas proximidades da direção vertical (Slawinski, 2007). Outro parâmetro importante é a velocidade de propagação na direção horizontal:

$$V_{px} = V_{pz} \sqrt{1 + 2\epsilon} \quad (6)$$

Dependendo do sinal de  $\epsilon$ , uma das velocidade ( $V_{pz}$  ou  $V_{px}$ ) será a maior velocidade presente na camada e a outra será a menor. É importante mencionar, como mostrado por Alkhalifah e Tsvankin (1995), que a cinemática da onda P depende apenas de três parâmetros  $V_{pz}$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ .

Assim, para o processamento apenas de ondas P, é conveniente substituir os parâmetros de Thomsen pelos seguintes parâmetros:  $\eta$  e  $V_{pn}$ , onde o primeiro é o parâmetro de não-elipticidade e o segundo é a velocidade NMO (para refletores horizontais), dados em termos dos parâmetros de Thomsen por:

$$V_{pn} = V_{pz} \sqrt{1 + 2\delta} \quad (7)$$

$$\eta = \frac{\epsilon - \delta}{1 + 2\delta} \quad (8)$$

## 2.1 A equação elástica da onda

A Segunda Lei de Newton aplicada à propagação de ondas elásticas é dada por:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (9)$$

onde  $\tau_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões,  $u_i$  é o deslocamento de partícula,  $\rho$  é a densidade do meio e  $f$  é um termo de fontes volumétricas.

Os tensores de elasticidade  $C_{ijkl}$  e o de deformação  $\epsilon_{kl}$  obedecem à chamada Lei de Hooke:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (10)$$

Não está sendo utilizada a notação de Voigt para o tensor de elasticidade, ou seja, na equação acima,  $C_{ijkl}$  é o tensor de elasticidade, de 4ª ordem. A partir destas expressões, pode-se facilmente chegar às equações para a propagação de ondas elásticas em meios VTI em termos de tensões e velocidades, dadas por:

$$\begin{aligned} \rho \partial_t v_x - \partial_x \tau_{xx} - \partial_z \tau_{xz} &= f_x \\ \rho \partial_t v_z - \partial_x \tau_{xz} - \partial_z \tau_{zz} &= f_z \\ \partial_t \tau_{xx} - (c_{11} \partial_x v_x + c_{13} \partial_z v_z) &= -\partial_t g_{xx} \\ \partial_t \tau_{zz} - (c_{13} \partial_x v_x + c_{33} \partial_z v_z) &= -\partial_t g_{zz} \\ \partial_t \tau_{xz} - c_{55} (\partial_z v_x + \partial_x v_z) &= -\partial_t g_{xz} \end{aligned} \quad (11)$$

Onde, os termos do lado direito das três últimas equações são fontes de tensão ou injeção de massa no caso *offsore*. As equações (11) podem ser resolvidas numericamente utilizando-se os operadores de diferenças finitas para malha intercalada (Virieux, 1986), conforme apresentado em Faria e Stoffa (1994).

## 2.2 A equação pseudo-acústica

A primeira formulação pseudo-acústica para meios VTI foi proposta por Alkhalifah (2000). Essa formulação expressa o comportamento cinemático das ondas primárias com boa aproximação. Ela é obtida a partir da aplicação da transformada inversa de Fourier diretamente na expressão da relação de dispersão aproximada, obtida por Alkhalifah (1998). Assim, a partir da expressão analítica da velocidade de fase de onda P:

$$V_p(\theta)^2 = V_{pz}^2 \left[ 1 + \epsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} + \frac{f}{2} \sqrt{1 + \frac{2\epsilon \sin^2 \theta}{f} (2\delta \cos^2 \theta - \epsilon \cos 2\theta) + \frac{4\epsilon^2 \sin^4 \theta}{f^2}} \right], \quad (12)$$

onde  $f = 1 - V_{sz}^2/V_{pz}^2$ , impondo um valor nulo para a velocidade de onda S na direção vertical, segue que  $f = 1$ . Utilizando ainda as expressões  $\mathbf{K} = \omega \mathbf{p}$ ,  $p_x = \frac{\sin(\theta)}{V(\theta)}$  e  $p_y = \frac{\cos(\theta)}{V(\theta)}$ , onde K é o número de onda,  $p$  é a vagarosidade e  $\omega$  é a frequência angular, obtém-se a relação de dispersão:

$$k_y^2 = \frac{V_{pn}^2}{V_{pz}^2} \left( \frac{\omega^2}{V_{pn}^2} - \frac{\omega^2 k_x^2}{\omega^2 - 2V_{pn}^2 \eta k_x^2} \right) \quad (13)$$

Multiplicando a equação de dispersão por um campo de onda no domínio Fourier:

$$k_y^2 \cdot F(k_x, k_y, \omega) = \frac{V_{pn}^2}{V_{pz}^2} \left( \frac{\omega^2}{V_{pn}^2} - \frac{\omega^2 k_x^2}{\omega^2 - 2V_{pn}^2 \eta k_x^2} \right) \cdot F(k_x, k_y, \omega) \quad (14)$$

Aplicando as transformadas inversas de Fourier (ou, equivalentemente, fazendo o mapeamento  $k_y = -i \frac{d}{dy}$ ;  $k_x = -i \frac{\partial}{\partial x}$  e  $\omega = i \frac{\partial}{\partial t}$ ), a equação da onda pseudo-acústica é obtida como:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = (2\eta + 1) V_{pn}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + V_{pz}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - 2V_{pn}^2 V_{pz}^2 \eta \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}$$

sendo:

$$P(x, y, t) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

As equações (15) são chamadas de pseudo-acústica, onde  $P(x, y, t)$  é o campo de pressão e  $F$  é um campo auxiliar. A equação pseudo-acústica funciona bem desde que  $\epsilon \geq \delta$  e  $\eta \geq 0$  (Conceição, 2011a), que abrange a maior parte dos casos de interesse em geofísica.

### 3. Implementação Computacional

As equações (15) são resolvidas numericamente em um algoritmo escrito em Fortran, para posterior implementação da RTM. Para a implementação do algoritmo de modelagem, utilizamos o método das diferenças finitas, onde o domínio é dividido em uma quantidade finita de pontos, igualmente espaçadas em

cada direção e no tempo. Em segunda ordem de aproximação, temos:

$$F(x, y, t)|_{i,j}^{n+1} = 2F_{i,j}^n - F_{i,j}^{n-1} + \Delta t^2 P_{i,j}^n \quad (16)$$

$$P(x, y, t)|_{i,j}^{n+1} = 2P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n-1} + \Delta t^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right)_{i,j}^n \quad (17)$$

$$\left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right)_{i,j}^n = a_1 \left( \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right) + a_2 \left( \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) - \frac{a_3}{\Delta x^2 \Delta y^2} [4F_{i,j}^n - 2(F_{i-1,j}^n + F_{i,j+1}^n + F_{i+1,j}^n + F_{i,j-1}^n) + F_{i-1,j-1}^n + F_{i+1,j-1}^n + F_{i+1,j+1}^n + F_{i-1,j+1}^n] \quad (18)$$

Onde,

$$a_1 = (1 + 2\eta_{i,j}) v_{pn}^2(i, j), \quad a_2 = v_{pz}^2(i, j) \quad \text{e} \quad a_3 = 2\eta_{i,j} v_{pn}^2(i, j) v_{pz}^2(i, j).$$

A figura a seguir mostra um esquema de malhas que representa a discretização de pontos empregado na resolução da equação pseudo-acústica.

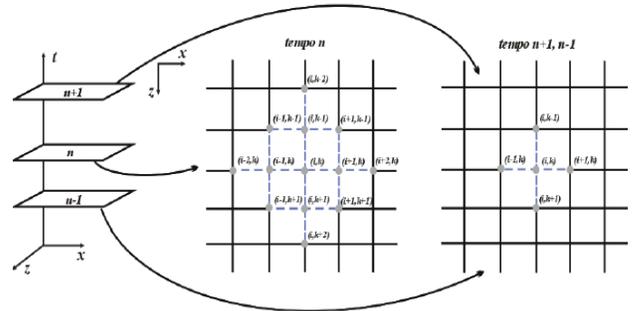


Figura 1 – Esquema da discretização para pontos no tempo em um modelo acústico (Conceição, 2011b).

### 4. Exemplos Numéricos e Aplicações

A seguir, apresentamos um exemplo de modelagem utilizando o algoritmo VTI implementado. O modelo escolhido é conhecido como Hess VTI, disponibilizado pelo Hess Corporation. Este modelo é composto originalmente por 3601 x 1501 pontos, tendo sido reamostrado para 904 x 575 pontos, além dos valores de velocidade terem sido convertidos para  $V_{pz}$ ,  $V_{pn}$  e  $\eta$  utilizando unidades do SI. Os parâmetros numéricos utilizados foram os seguintes: espaçamento de  $h = 5\text{m}$ , passo de tempo de  $\Delta t = 0.2\text{ms}$ , pulso de Ricker com frequência de corte de 40Hz, localizada nas coordenadas (2000,50) m, sendo 25 m a profundidade da leitura do

sismograma. Com o  $h$  adotado, o modelo Hess compreende um tamanho total de 4515x2870 m. O tempo total de análise foi de 2,4 s.

Os resultados da modelagem são apresentados na Figura 2, através de snapshots em diferentes tempos, e na Figura 3 apresentamos o sismograma sintético gerado.

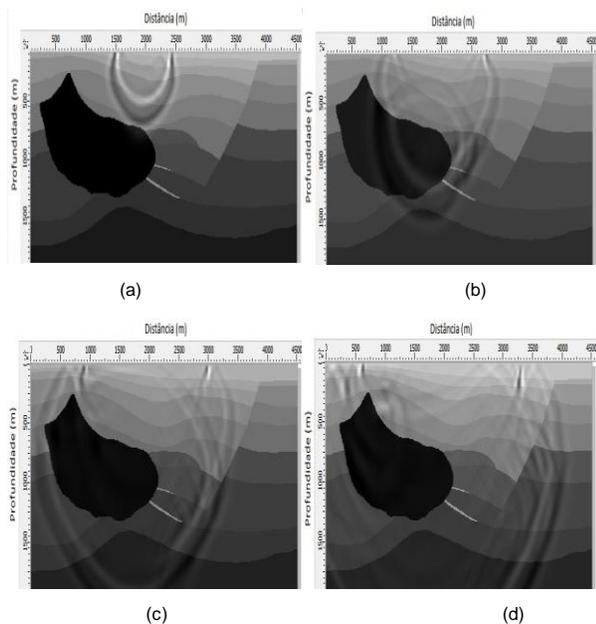


Figura 2 – Snapshots da modelagem Hess VTI em (a) 0,4 s, (b) 0,6 s, (c) 0,8 s e (d) 1,0 s.

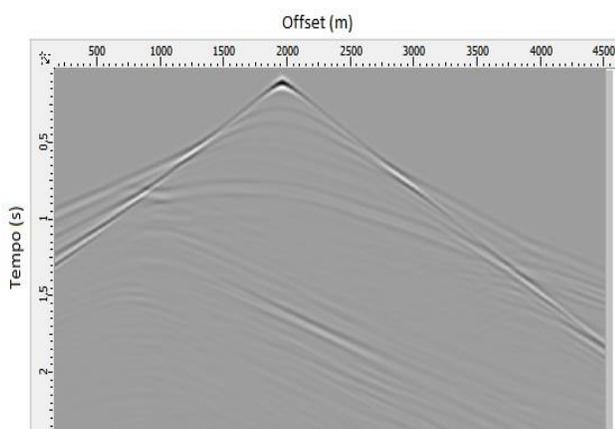


Figura 3 – Sismograma sintético gerado na modelagem Hess VTI.

A seguir, mostramos os resultados preliminares da aplicação do algoritmo de migração desenvolvido para um modelo offshore simples de camadas horizontais.

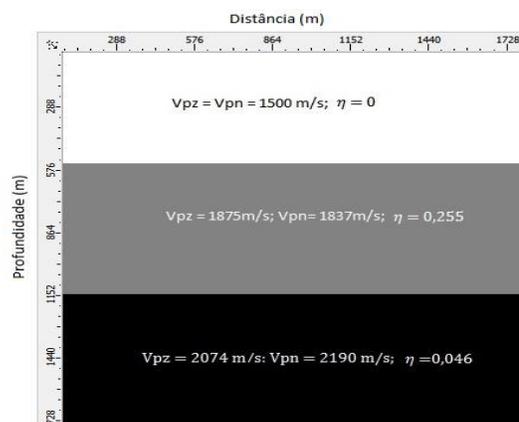


Figura 4 – modelo de três camadas

Primeiro mostramos, na figura 4, o modelo de camadas utilizado, onde são apresentadas as velocidades de onda P na direção vertical ( $V_{pz}$ ), as velocidades NMO ( $V_{pn}$ ) e o parâmetro de não-elipticidade ( $\eta$ ) para cada uma das 3 camadas. O modelo possui dimensão de 1800x1800 m, onde utilizamos um espaçamento do grid de  $h = 3.0$  m (totalizando 601x601 pontos) e um intervalo de tempo de  $\Delta t = 0.2$  ms e com um pulso de 40Hz. O tempo total de análise foi de 1,9 s, de forma que utilizamos 9500 passos de tempo.

Na Figura 5, apresentamos o sismograma gerado, onde é possível ver a onda direta e as hipérbolas de reflexão das duas interfaces.

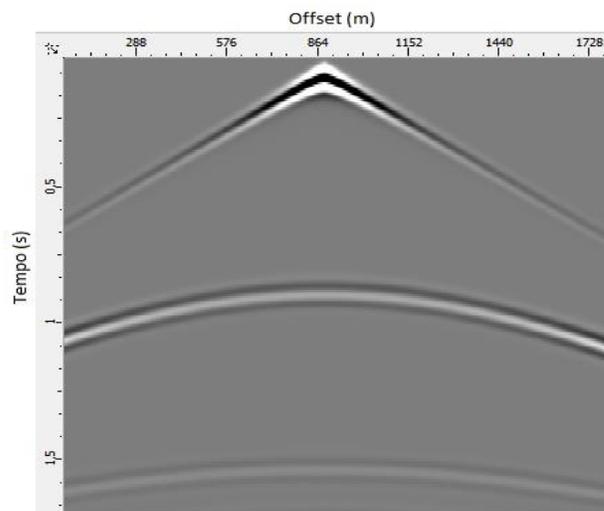


Figura 5 – Sismograma do modelo de três camadas

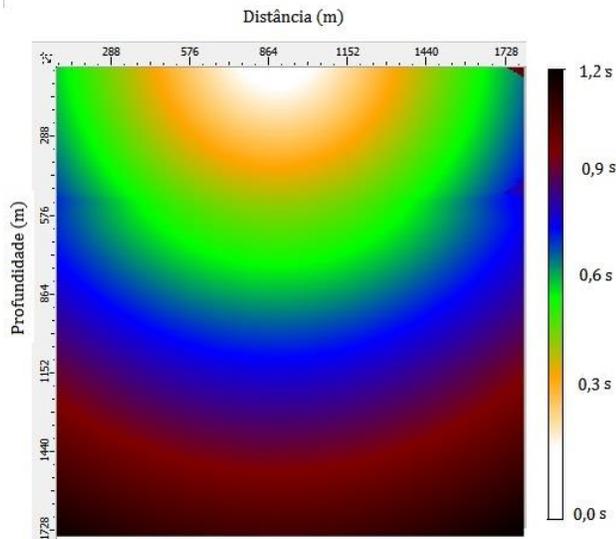


Figura 6 – Matriz de tempo de trânsito.

Na Figura 6, apresentamos a matrizes de tempo de trânsito, que fornece os tempos de chegada da onda direta a cada ponto do modelo. Para a sua obtenção, foi utilizado o algoritmo de modelagem pseudo-acústico e o critério da amplitude máxima. Como se sabe, a migração reversa no tempo (RTM) consiste em depropagar a energia registrada em superfície (sismograma), aplicando-se o princípio do imageamento para formar a imagem em profundidade. Neste trabalho, utilizou-se a condição de imagem de tempo de excitação, onde a imagem é formada sempre que o tempo da onda depropagada é igual ao tempo da matriz de tempo de trânsito. Na Figura 7, mostra-se esquematicamente o princípio de imageamento.

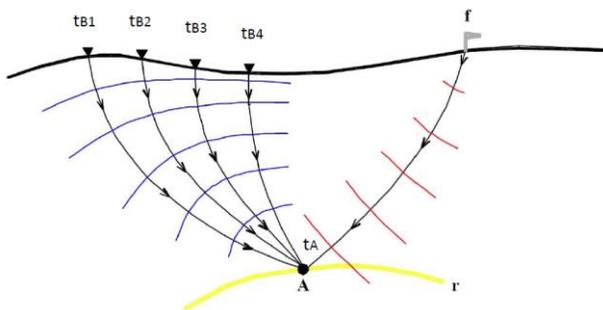


Figura 7 – Princípio do imageamento (Bulcão, 2004)

Assim, a migração RTM consiste nas seguintes etapas:

- Modelagem direta: obtenção da matriz de tempo de trânsito;
- Depropagação do campo de onda: aplicação da condição de imagem para formar a imagem.

Na figura 8, apresenta-se a imagem obtida para o modelo de camadas apresentado anteriormente, i.e., o resultado da migração do sismograma apresentado na Figura 5.

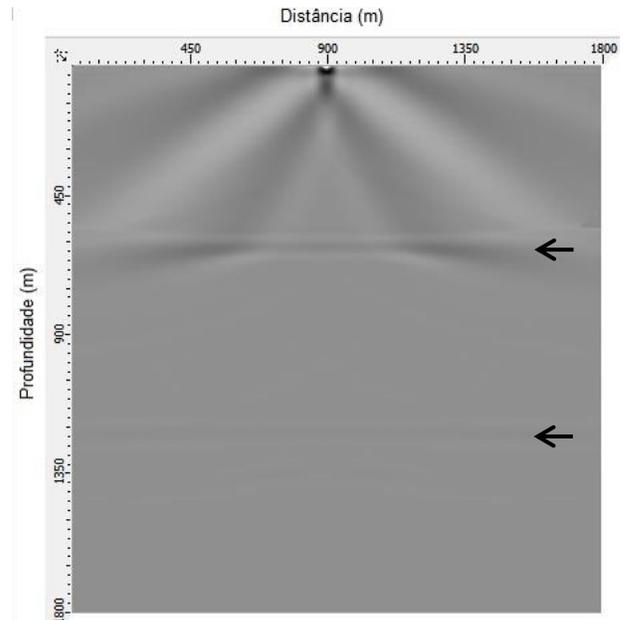


Figura 8 – Migração RTM VTI para o modelo de camadas.

Enfatizamos que esta imagem é de um único tiro e que não foi utilizado nenhum filtro. Mesmo assim, pode-se ver claramente os eventos associados aos refletos, conforme indicado pelas setas pretas.

## 5. Conclusão

Neste trabalho, estudamos numericamente a propagação de ondas sísmicas em meios anisotrópicos com simetria VTI. Foram implementados algoritmos de modelagem direta e inversa utilizando o Método das Diferenças Finitas, tanto a formulação acústica como a pseudo-acústica de Alkhaliat. Conforme os exemplos numéricos apresentados, os resultados obtidos estão de acordo com o esperado. Os resultados da aplicação do algoritmo de modelagem desenvolvido para a migração RTM são preliminares, pois implementamos apenas a RTM de um único tiro e aplicamos a um modelo bastante simples, de camadas horizontais. Esta etapa da pesquisa ainda está em desenvolvimento, com o andamento da pesquisa, será possível realizar a migração RTM de modelos complexos, como é o caso do Hess VTI. Entretanto, para tal, precisamos implementar outras condições de imagem e/ou suavização dos campos de vagarosidade para melhorar a matriz de tempo de trânsito no caso de modelos complexos e implementar a condição de imagem de correlação cruzada.

## 6. Referências

ALKHALIFAH, T., TSVANKIN, 1995, "Velocity analysis for transversely isotropic media", *Geophysics*, v. 60, n. 5, pp. 1550-1566.

ALKHALIFAH, Tariq, 1998, "Acoustic approximations for processing in transversely isotropic media", *Geophysics*, v. 63, n.2, pp. 623-631.

ALKHALIFAH, Tariq, 2000, "An acoustic wave equation for anisotropic media", *Geophysics*, v.65, n.4.

BAYSAL, E., KOSLOFF, D. D., SHERWOOD, J. W. C., 1983, "Reverse time migration", *Geophysics*, v. 48, n. 11, pp. 1514–1524.

BULCÃO, A., 2004, "Modelagem e Migração Reversa no Tempo Empregando Operadores Elásticos e Acústicos." Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

CONCEIÇÃO, Elias da, 2011a, "Evaluation of Acoustic Operators for VTI Seismic Modeling." In: 12<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society, SBGf, RJ, Brasil.

CONCEIÇÃO, Elias da, 2011b. Estudo sobre Operadores Acústicos para Modelagem Sísmica Anisotrópica. Rio de Janeiro:UFRJ/COPPE.

FARIA, E. L., STOFFA, P. L., "Finite-difference modeling in transversely isotropic media", *Geophysics*, v. 59, n. 2, pp. 282–289, 1994.

SLAWINSKI, M. A., 2007, "Waves and Rays in Elastic Continua", San Francisco, California, USA.

VIRIEUX, J., "P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method", *Geophysics*, v. 51, n. 4, pp. 889–901, 1986.