



## Acoplamento acústico-elástico eficiente para modelagem sísmica com o MDF

Clebson Dors, Leandro Di Bartolo e Webe João Mansur, UFRJ/COPPE/PEC

*Copyright 2012, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica Este texto foi preparado para a apresentação no V Simpósio Brasileiro de Geofísica, Salvador, 27 a 29 de novembro de 2012. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do V SimBGF, mas não necessariamente representa a opinião da SBGf ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGf.*

### RESUMO

Em regiões petrolíferas envolvendo águas profundas e ultra-profundas, como é o caso do pré-sal brasileiro, é comum que a camada de água responda por 30 a 40% do modelo geofísico adotado. Nestes casos, a utilização de operadores de Diferenças Finitas (DF) acústicos para simular a camada de água, acoplados a operadores elásticos para simular as camadas de rocha, se torna vantajosa. Neste trabalho apresenta-se uma estratégia eficiente para o acoplamento acústico-elástico combinando o esquema acústico chamado de ESG (equivalent staggered grid) e o esquema tradicional de malha intercalada (SSG). Trata-se de um acoplamento explícito de fácil implementação, onde as respostas numéricas equivalem às do esquema SSG. As vantagens deste acoplamento são demonstradas através da modelagem utilizando o modelo Marmousi2 com camada de água estendida (compondo 35% do modelo), caso este onde se observou uma economia de cerca de 20% em memória e tempo de processamento.

### INTRODUÇÃO

O método das diferenças finitas (FDM) continua a ser o mais popular método numérico para a propagação de ondas sísmicas, em virtude de sua eficiência computacional e de sua fácil implementação. Como é bem conhecido, os primeiros esquemas numéricos propostos para ondas elásticas (por exemplo, Kelly et al. (1976)) não forneciam bons resultados para regiões offshore. Em virtude disto, as formulações de malha intercalada tornaram-se proeminentes, uma vez que superaram esses problemas, apresentando bons resultados em regiões de acoplamento acústico-elástico.

O esquema de malha intercalada padrão (SSG) (Virieux, 1986; Levander, 1989; Moczo et al., 2000) é uma abordagem muito bem sucedida para a propagação de ondas sísmicas, no entanto, quando o dispêndio de memória é um elemento crítico, é bem sabido que o SSG

apresenta desvantagem com respeito aos esquemas não intercalados. Neste sentido, Di Bartolo et al. (2011) propuseram um esquema equivalente ao de malha intercalada (ESG) para problemas acústicos em meios com densidade constante, esquema este em termos apenas de pressão acústica, que fornece as mesmas respostas numéricas do que a versão acústica do SSG em meios com densidade constante, mas com menor dispêndio de memória. Em Di Bartolo et al. (2012) apresenta-se uma extensão deste trabalho para o caso geral (densidade heterogênea), descrevendo em detalhes a nova família de esquemas propostos e suas vantagens em relação ao SSG. Estas vantagens do ESG podem ser adequadamente exploradas em modelagens envolvendo regiões como as do pré-sal brasileiro, aonde as profundidades da lâmina d'água variam de 1.000 a 2.000 metros e as profundidades das camadas de rochas abaixo desta variam entre 4.000 e 6.000 metros, o que implica em uma razão alta da quantidade de água com relação ao meio completo girando entre 30 e 40%. Nestes casos, o acoplamento acústico-elástico entre os esquemas ESG e SSG torna-se uma alternativa interessante para modelar estas regiões, uma vez que reduz o gasto de memória e o tempo de processamento, mantendo inalterada a precisão numérica em relação à adoção do esquema SSG na região toda.

Este trabalho propõe um procedimento de acoplamento acústico-elástico onde se aplica o ESG para a camada de água e o SSG para as camadas de rocha usando uma técnica de acoplamento explícito direto combinada com a técnica de sobreposição de domínios, o que torna a implementação simples, fácil e muito eficiente. Na técnica de acoplamento explícito direto, a marcha no tempo é explícita e não necessita de um processo iterativo entre subdomínios, tornando essa técnica muito rápida, mas condicionalmente estável. Uma vez que o ESG e o SSG apresentam o mesmo critério de estabilidade, esta estratégia de acoplamento torna-se a mais adequada. Existem vários artigos sobre técnicas de acoplamento que apresentam estratégias diferentes para lidar com o acoplamento entre diferentes domínios físicos; para uma revisão completa recomenda-se Soares (2011). A vantagem do algoritmo de acoplamento proposto é que suas propriedades de precisão e estabilidade são iguais às do SSG, mas seus requisitos de memória e esforço computacional são reduzidos em relação ao SSG aplicado a todo o modelo. Como consequência, considerando por exemplo, um modelo geológico composto por 35% de

água, o algoritmo de acoplamento proposto apresenta uma redução de requisitos de memória e operações de ponto flutuante, respectivamente, de 22% e 24% para 2D e de 25% e 27% para 3D, utilizando quarta ordem de aproximação espacial e segunda ordem temporal.

Neste trabalho, por simplicidade, o acoplamento é desenvolvido adotando meios 2D e operadores de DF de quarta e segunda ordem de aproximação, respectivamente, no espaço e no tempo. Ordens superiores e extensões para o caso 3D podem ser feitas de forma simples.

## EQUAÇÕES PARA PROPAGAÇÃO DE ONDAS

A propagação de ondas elásticas em meios 2D heterogêneos e isotrópicos pode ser descrita pelas seguintes equações em coordenadas cartesianas (Virieux, 1986)

$$\rho \partial_t v_x = \partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz} \quad (1)$$

$$\rho \partial_t v_z = \partial_x \tau_{xz} + \partial_z \tau_{zz} \quad (2)$$

$$\partial_t \tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \partial_x v_x + \lambda \partial_z v_z \quad (3)$$

$$\partial_t \tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \partial_z v_z + \lambda \partial_x v_x \quad (4)$$

$$\partial_t \tau_{xz} = \mu (\partial_x v_z + \partial_z v_x), \quad (5)$$

onde  $\tau_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões e  $v_i$  são as componentes do vetor de velocidades (campo de propagação);  $\lambda$  e  $\mu$  são os parâmetros de Lamé e  $\rho$  é a densidade de massa do meio (onde  $c_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  e  $c_S = \sqrt{\mu/\rho}$  são as velocidades de propagação);  $\partial_x$ ,  $\partial_z$  e  $\partial_t$  representam derivadas de primeira ordem.

Por outro lado, a equação correspondente para a propagação de ondas acústicas em termos somente do campo de pressões é descrita pela equação da onda

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 p = \rho \partial_x \left( \frac{1}{\rho} \partial_x p \right) + \rho \partial_z \left( \frac{1}{\rho} \partial_z p \right), \quad (6)$$

onde  $c = \sqrt{\kappa/\rho}$  é a velocidade de propagação no meio acústico ( $\kappa$  é o módulo de compressão). Para problemas onde o gradiente de densidades é negligenciável, como é o caso da camada de água, a equação 6 se simplifica para a bem conhecida equação acústica da onda

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 p = \partial_x^2 p + \partial_z^2 p. \quad (7)$$

## FORMULAÇÃO ACÚSTICA ESG

O esquema de malha intercalada equivalente (ESG) acústico para o caso de densidade constante aplica à equação 7 o seguinte operador (Di Bartolo et al., 2012; Di Bartolo et al., 2011)

$$(\partial_z^2 p)_{i,k}^n = \frac{1}{576h^2} \{ (P_{i,k-3}^n + P_{i,k+3}^n) - 54 (P_{i,k-2}^n + P_{i,k+2}^n) + 783 (P_{i,k-1}^n + P_{i,k+1}^n) - 1460 P_{i,k}^n \} \quad (8)$$

para a direção  $z$  e um operador equivalente para a direção  $x$ , onde  $P_{i,k}^n$  é a pressão discreta na posição  $(x, z, t) = (ih, kh, n\Delta t)$  da malha, sendo  $h$  o espaçamento da malha e  $\Delta t$  o passo de tempo. O *stencil* do esquema ESG é de sete pontos em cada direção, enquanto que o do esquema padrão não-intercalado da mesma ordem é de cinco pontos. A aproximação utilizada para derivada temporal na ESG é a aproximação habitual de DF para derivada de segunda ordem (com *stencil* de três pontos). É importante chamar a atenção para o fato de que as respostas deste esquema são numericamente equivalentes às do SSG acústico para meios com densidade constante (Di Bartolo et al., 2012). Assim, o critério de estabilidade do ESG é igual ao do SSG.

## FORMULAÇÃO ELÁSTICA SSG

O esquema tradicional de malha intercalada (SSG) é obtido aplicando operadores de DF para malha intercalada nas equações 1-5, considerando os campos de propagação e propriedades em posições corretas desta malha (Virieux, 1986; Levander, 1989) (ver Figura 1). O esquema de quarta ordem é obtido aplicando-se operadores com *stencil* de quatro pontos da seguinte forma (Levander, 1989)

$$(\partial_z f)_{i,k}^n = \frac{1}{24h} \left[ F_{i,k-3/2}^n - F_{i,k+3/2}^n - 27(F_{i,k-1/2}^n - F_{i,k+1/2}^n) \right] \quad (9)$$

para a direção  $z$  e um operador equivalente para a direção  $x$ , onde  $F_{i,k}^n$  representam as componentes discretas das tensões  $(X, Z, T) = (\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz})$  ou das velocidades  $(U, V) = (v_x, v_z)$  dependendo do caso, onde devem ser observadas as corretas posições na malha intercalada para cada componente;  $(L, M) = (\lambda, \mu)$  são os parâmetros de Lamé discretos e  $B = 1/\rho$  é o inverso da densidade discreta (ver Figura 1 com suas posições na malha). A aproximação temporal utilizada é a usual com *stencil* de dois pontos (segunda ordem de aproximação) para malha intercalada padrão (Virieux, 1986).

## PROCEDIMENTO DE ACOPLAMENTO

Nesta seção, é discutido em detalhes o esquema de acoplamento entre o ESG e o SSG. Por razões de simplicidade, o fundo do mar é tomado como horizontal, mas a extensão para leitos irregulares pode ser feita sem dificuldades.

A estratégia de acoplamento desenvolvida aqui considera a subdivisão do modelo físico em duas sub-regiões, uma acústica e outra elástica, para permitir a aplicação direta do ESG e do SSG, respectivamente. Primeiramente, pode-se pensar que esta subdivisão deve ser exatamente na profundidade do leito do mar, que corresponderia à posição  $k = k_0$  (onde  $k_0$  representa o ponto da malha onde o meio torna-se elástico). No entanto, como o objetivo pretendido é manter os resul-

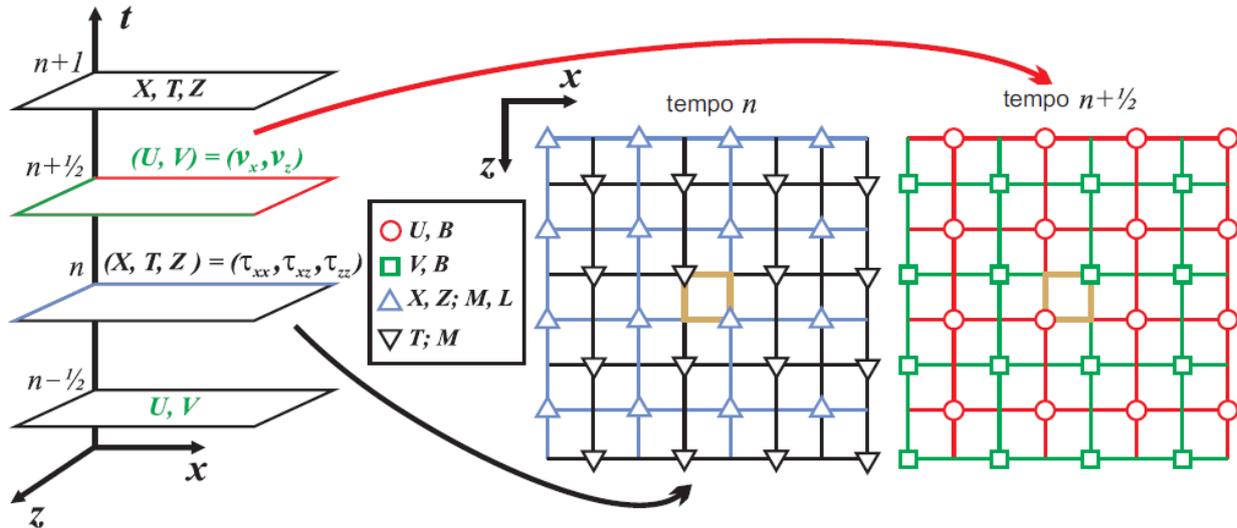


Figura 1: Malha intercalada tradicional. Os painéis à esquerda e à direita mostram as posições, respectivamente, das componentes de tensão (e das propriedades elásticas do meio) no passo de tempo  $n$  e das componentes de velocidade (e do inverso da densidade) no passo de tempo  $n + 1/2$ .

tados numericamente iguais aos obtidos com o esquema SSG aplicado a todo o modelo, esta interface deve ser definida alguns pontos acima do fundo do oceano e a técnica de sobreposição de domínios deve ser usada (Soares, 2011) para garantir resultados equivalentes ao SSG, como será descrito mais abaixo.

Basicamente, o acoplamento é estabelecido definindo-se a estratégia de marcha no tempo a ser aplicada em conjunto com a estratégia de sobreposição de sub-regiões, a fim de assegurar a equivalência com o SSG.

### Marcha no tempo

A estratégia de marcha no tempo adotada neste trabalho é chamada de acoplamento explícito direto e usa as mesmas aproximações de DF originalmente empregadas por esses esquemas (segunda ordem no tempo). Esta estratégia é vantajosa porque é de fácil implementação e apresenta excelente desempenho computacional. É particularmente interessante para o regime de acoplamento proposto, porque o ESG e o SSG têm o mesmo critério de estabilidade o que lhes permite usar o mesmo passo de tempo. Para compreender a estratégia de acoplamento temporal em detalhes, é necessário rever o processo de marcha no tempo para cada um deles.

Primeiro, o SSG é intercalado no tempo, como pode ser visto na Figura 1. Assim, aplicando uma fonte sísmica pontual de tensão (a partir de  $n = 0$ ), as componentes de velocidade, digamos na posição da malha  $(i, k)$  e no passo de tempo  $n = 1/2$  são calculados utilizando um *stencil* em cruz que envolve oito componentes de tensão no passo  $n = 0$  e a componente de velocidade correspondente na mesma posição da malha  $(i, k)$  e no passo anterior  $n = -1/2$ . Uma vez que as componentes de

velocidade foram calculadas para toda a malha, as componentes de tensão podem ser computadas no passo de tempo  $n = 1$  usando oito componentes de velocidade já calculadas no passo de tempo  $n = 1/2$  e da correspondente componente de tensão (conhecida) no passo de tempo  $n = 0$ . Esta técnica de integração no tempo é conhecida como “Leapfrog”, pois as componentes de velocidades e tensões são calculadas pulando umas sobre as outras, sendo necessário armazenar apenas um painel de cada componente para a marcha no tempo. Por outro lado, o ESG é um esquema não intercalado no tempo, onde a pressão  $P_{i,k}^{n+1}$  é calculada usando uma cruz de treze pontos de pressão no passo de tempo anterior  $n$  e o ponto  $P_{i,k}^{n-1}$ , requerendo portanto o armazenamento de dois painéis de pressões. Assim, a partir de um tempo  $n$ , um passo de tempo do SSG calcula as componentes de velocidade em  $n + 1/2$  e depois as componentes de tensão em  $n + 1$ , enquanto o ESG calcula em uma etapa única a pressão acústica no tempo  $n + 1$ .

Então, adotando o mesmo incremento de tempo para o ESG e o SSG, o algoritmo de marcha no tempo acoplado consiste em promover um passo de tempo em cada sub-região, e então atualizar as tensões e pressões na região de sobreposição entre as sub-regiões. O tamanho desta camada de sobreposição de pontos auxiliares, necessária a cada sub-região para transferir tensões e pressões entre subdomínios, é proporcional ao *stencil* dos operadores espaciais envolvidos. Como consequência, este *stencil* vai definir a posição em profundidade da interface numérica (entre o ESG e SSG) com relação à interface física ( $k = k_0$ ), como será visto em seguida.

### Sobreposição das sub-regiões

Como explicado anteriormente, alguns pontos da malha

devem ser adicionados na interface de acoplamento para trocar informações, devido ao *stencil* espacial dos esquemas (Figura 2). À medida que o ESG adotado é válido para meios com densidade constante, este esquema deve ser aplicado somente até a profundidade  $k = k_0 - 4$  (para quarta ordem de aproximação espacial). Assim, é necessário alargar a respectiva sub-região até a profundidade  $k = k_0 - 1$  para cobrir o *stencil* do ESG (veja a Figura 2). A mesma ideia aplica-se ao SSG, o que implica na extensão da sua sub-região até  $k = k_0 - 6$ , para permitir o cálculo das velocidades elásticas a partir da profundidade  $k = k_0 - 9/2$  e tensões a partir da profundidade  $k = k_0 - 3$ . Em seguida são dados detalhes sobre as variáveis a serem transferidas entre as sub-regiões, que são basicamente as tensões e pressões, necessárias para o cálculo dos operadores espaciais envolvidos.

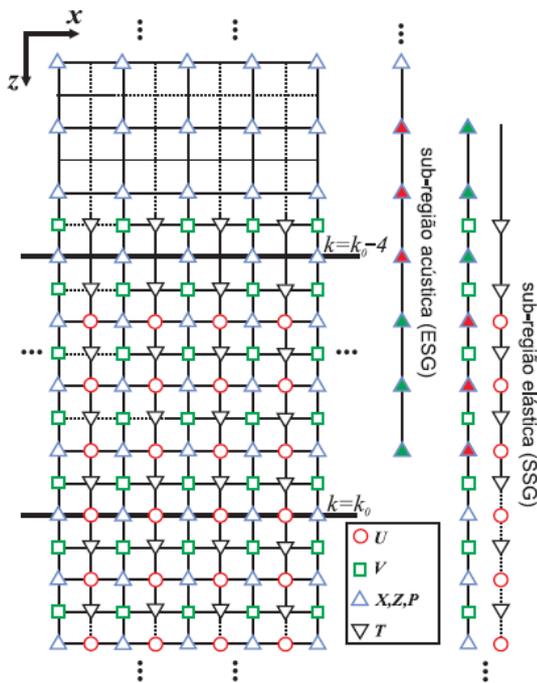


Figura 2: Malha do acoplamento, mostrando as sub-regiões acústica e elástica. Os pontos vermelhos são copiados para a posição dos pontos verdes ao lado.

**Sub-região acústica**

Usando o ESG, pode-se calcular os pontos da malha até uma profundidade  $k = k_0 - 4$  no passo de tempo  $n + 1$ . No entanto, para calcular a pressão em  $k_0 - 4$  no passo de tempo  $n + 1$  são necessárias três pressões acústicas abaixo (a partir de  $k_0 - 3$  até  $k_0 - 1$ ) no passo de tempo  $n$ . Estes pontos da malha foram calculados na sub-região elástica usando o SSG e, em seguida, são copiados para a sub-região acústica. Na verdade, a pressão acústica deve ser copiada da sub-região elástica (ver os pontos verdes e vermelhos na Figura 2), sabendo que  $P_{i,k}^n = -X_{i,k}^n$  ou  $P_{i,k}^n = -Z_{i,k}^n$ , uma vez

que  $\tau_{xx} = \tau_{zz} = -p$  em meios acústicos ( $\mu = 0$ ).

**Sub-região Elástica**

Na sub-região elástica, é necessário transferir três pontos de tensão normal (pressão) calculados na sub-região acústica no passo de tempo  $n$  (de profundidade  $k = k_0 - 6$  a  $k = k_0 - 4$ ) a fim de calcular as velocidades no tempo  $n+1/2$  e na profundidade a partir de  $k = k_0 - 9/2$  (veja a Figura 2). Na verdade, estes pontos discretos de pressão são copiados sabendo que na região acústica  $X_{i,k}^n = -P_{i,k}^n$  e  $Z_{i,k}^n = -P_{i,k}^n$ . Por fim, após computar os painéis de velocidade na sub-região elástica, as componentes de tensão a partir da profundidade  $k = k_0 - 3$  podem ser calculadas no tempo  $n + 1$ . Observe que os valores da tensão de cisalhamento a partir da profundidade  $k = k_0 - 9/2$  até  $k = k_0 - 1/2$  são nulos e não necessitam ser computados.

**EXEMPLO E DISCUSSÃO**

Para demonstrar as vantagens do acoplamento proposto e a equivalência das respostas em relação ao esquema SSG aplicado a toda malha, são apresentados os resultados de uma modelagem utilizando o modelo de velocidades Marmousi2 (Martin et al., 2006), que é originalmente composto por um modelo de densidades, um de velocidades de onda P e outro de velocidades de onda S. Os modelos tem originalmente  $13601 \times 2801$  pontos, porém na presente simulação os modelos foram estendidos em 1000 pontos na camada de água, como mostrado na Figura 3. Com isto, o modelo passa a ser composto

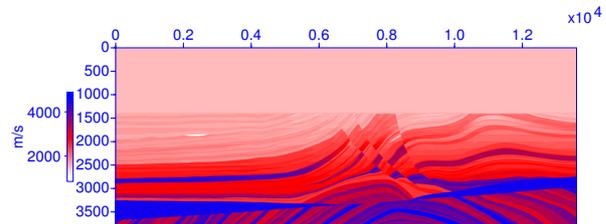


Figura 3: Modelo Marmousi2 de velocidade de propagação P (os modelos de velocidade S e de densidade tem a mesma forma e são bem conhecidos).

por 35% de água. Os parâmetros numéricos utilizados foram  $h = 1$  m e  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-4}$  s. A fonte sísmica (pulso de Ricker) está localizada no ponto da malha  $(i,k) = (6801,4)$  e o receptor em  $(i,k) = (7001,2501)$ . Condições de contorno não-reflexivas (Reynolds, 1978) foram utilizadas combinadas com camadas de absorção (Cerjan et al., 1985) em todos os limites excluindo o limite superior, onde foi aplicada a condição de Dirichlet ( $P = 0$ ). O tempo total de análise foi de 5 s, o que equivale a 50.000 passos de tempo com o  $\Delta t$  utilizado.

A Figura 4 apresenta os snapshots de  $Z$  mostrando a propagação da onda no tempo  $t = 2,5$  s tanto para o algoritmo de acoplamento proposto no presente traba-

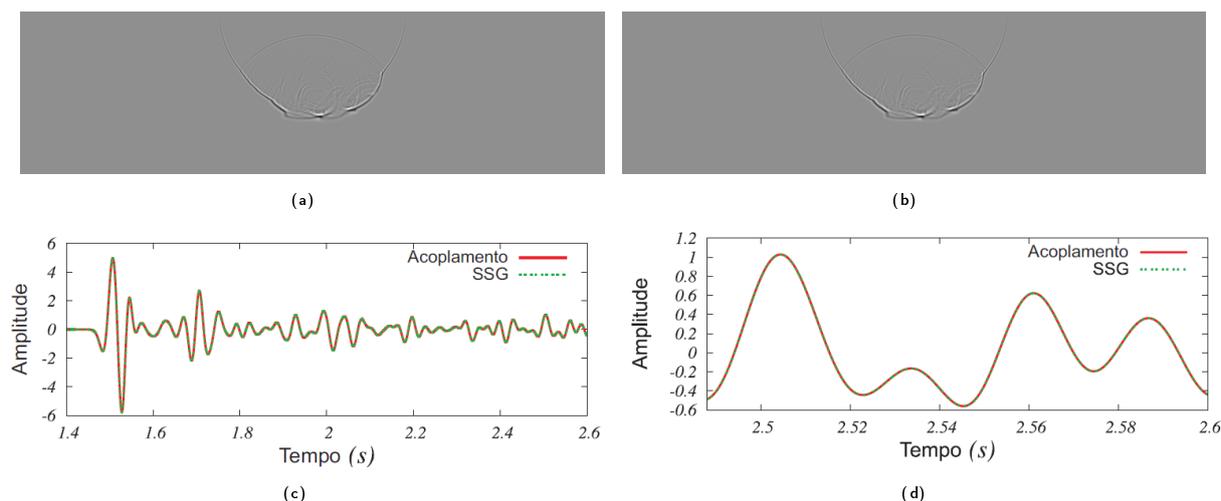


Figura 4: Snapshots da componente discreta  $Z$  de tensão no tempo  $t = 2,5$  s para: (a) o esquema de acoplamento e (b) o esquema SSG aplicado à toda a malha; (c) mostra um traço do sismograma medido na posição  $(i,k) = (7001,2501)$  da malha, para ambos os esquemas e (d) mostra uma versão ampliada da Figura 4(c).

Tabela 1: Consumo de memória e número de operações de ponto flutuante por ponto da malha e por passo de tempo para o caso 2D e 3D:  $M_f$  e  $M_p$  são os números de painéis de campos de propagação e de propriedades do meio armazenados na memória, sendo  $M_t$  a soma dos dois; flopn são os números totais de operações de ponto flutuante;  $\%M_t$  e  $\%flopn$  são os percentuais de redução em memória e flopn em relação ao SSG.

scheme	2D						3D					
	$M_f$	$M_p$	$M_t$	flopn	$\%M_t$	$\%flopn$	$M_f$	$M_p$	$M_t$	flopn	$\%M_t$	$\%flopn$
ESG	2	1	3	19	63%	68%	2	1	3	25	75%	76%
SSG	5	3	8	59	–	–	9	3	12	106	–	–
Coupling	3.95	2.30	6.25	45.00	22%	24%	6.65	2.30	8.95	77.65	25%	27%

Iho quanto para a modelagem utilizando apenas o SSG, bem como traços individuais para cada um destes na posição do receptor, onde pode ser visto que as soluções numéricas são iguais. O tempo total de processamento para o acoplamento foi de cerca de 13,8 h e para o SSG foi de 17,3 h em um PC quad-core de 2,8GHz e com 12 Gb de RAM. A Tabela 1 mostra os requisitos de memória (em número de painéis armazenados) e o número de operações de ponto flutuante por nó e passo de tempo (no caso elástico envolve todas as componentes de tensão e velocidade) considerando o ESG e o SSG aplicados individualmente a todo o modelo, comparativamente a utilização do acoplamento destes, para 2D e 3D. As informações de acoplamento nesta tabela foram estimadas para um modelo composto por 35% de água (como o modelo utilizado no exemplo), adotando uma média ponderada com pesos 0,35 para a ESG e 0,65 para o SSG. Pode ser visto que a memória e o esforço computacional despendido pelo acoplamento é entre 22-27 % menor que o SSG, o que pode ser crucial em especial em problemas 3D. Além disso, a Tabela 1 está em concordância com o tempo de processamento obtido nas modelagens com o Marmousi2.

## CONCLUSÕES

Neste trabalho, o esquema de malha intercalada equivalente (ESG) foi acoplado ao esquema de malha intercalada tradicional (SSG) utilizando-se uma técnica de acoplamento explícita e direta, onde as componentes de tensão normal e de pressão acústica são acopladas por meio de uma técnica de sobreposição de domínios, a fim de gerar respostas numéricas equivalentes ao SSG aplicado a todo o modelo. O acoplamento apresentado foi desenvolvido para o caso 2D em quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo e considerando o fundo do mar horizontal, mas a extensão para ordens superiores e modelos 3D, tanto quanto para fundos do mar irregulares, podem ser feitas de forma simples. O algoritmo resultante reduz substancialmente os requisitos de memória e o custo computacional em relação ao SSG, em torno 22-27% para um modelo composto por 35% de água. Destaca-se que estes ganhos podem chegar a 75% quando a água representa a parte principal de um modelo 3D.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem às agências públicas de fomento

CAPES, CNPq e FAPERJ pelo apoio financeiro e, especialmente, à Petrobras pela colaboração científica de longa data e pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIAS

- Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R., e Reshef, M., 1985, A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations: *Geophysics*, **50**, no. 4, 705–708.
- Di Bartolo, L., Dors, C., e Mansur, W., 2011, A new finite difference scheme for modeling acoustic wave propagation: *Geophysics Expanded Abstract* 30, pages 3032–3036.
- Di Bartolo, L., Dors, C., e Mansur, W. J., 2012, A new family of finite-difference schemes to solve the heterogeneous acoustic wave equation: *Geophysics*, **77**, no. 5.
- Kelly, K. R., Ward, R. W., Treitel, S., e Alford, R. M., 1976, Synthetic seismograms: a finite -difference approach: *Geophysics*, **41**, no. 1, 2–27.
- Levander, A., 1989, Finite-difference forward modeling in seismology, *in* James, D., Ed., *The Encyclopedia of Solid Earth Geophysics*: Van Nostrand Reinhold, 410–430.
- Martin, G., Wiley, R., e Marfurt, K., 2006, Marmousi2: An elastic upgrade for Marmousi: *The Leading Edge*, **25**, no. 2, 156–166.
- Moczo, P., Kristek, J., e Halada, L., 2000, 3d fourth-order staggered-grid finite-difference schemes: stability and grid dispersion: *Bulletin of the Seismological Society of America*, **90**, no. 3, 587–603.
- Reynolds, A. C., 1978, Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems: *Geophysics*, **43**, no. 6, 1099–1110.
- Soares, D., 2011, Coupled numerical methods to analyze interacting acoustic-dynamic models by multidomain decomposition techniques: *Mathematical Problems in Engineering*, **Coupled Numerical Methods in Engineering Analysis**.
- Virieux, J., 1986, P-sv wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method: *Geophysics*, **51**, no. 4, 889–901.