Determinação das oscilações livres da Terra com base no método de Rayleigh-Ritz

Luiz Gabriel S. de Oliveira, Natália V. de Oliveira e Carlos André M. da Silva – DCN/CEUNES/UFES
Emine Bayran – Cumhuriyet Üniversitesi - Turkey

Resumo

Este trabalho apresenta resultados preliminares oriundos da investigação teórica de oscilações livres esferoidais por meio da aplicação do método de Rayleigh-Ritz na determinação do campo de deslocamento associado. Um algoritmo computacional foi implementado com auxílio do pacote MATLAB. Os resultados mostraram-se satisfatórios e apresentaram a versatilidade desta técnica em estudos de sismologia de baixa frequência.

Introdução

Eventos sísmicos de grande magnitude costumam estar associados a propagação de ondas de corpo de baixa frequência, que são registradas em diversas estações sismológicas ao redor do mundo. Somado a este fato, ondas de superfície de longo período geradas pelos referidos eventos também trafegam ao longo da superfície da Terra, onde os efeitos da curvatura e rotação da influenciam nas características do registro (Dahlen 1968).

Em determinadas frequências discretas, tanto as ondas de corpo quanto as ondas de superfície induzem ao aparecimentos das *oscilações livres* ou *modos normais de vibração* (Aki & Richards 2002), que podem ser entendidas numa primeira análise como a manifestação de padrões estacionários na propagação destas ondas. Basicamente, a Terra apresenta duas formas de oscilações livres: *esferoidais e torodais*, que dependem diretamente da ordem angular *l* e do harmônico *n* do modo de vibração.

O fenômeno das oscilações livres constitui uma parte importante da Sismologia Global, pois permite refinar as informações sobre as propriedades elásticas e distribuição de densidades no interior terrestre, informações sobre o mecanismo de acoplamento mecânico e rotação diferenciada do núcleo interno em relação ao núcleo externo (Masters & Gilbert 1981, Laske & Masters 1999) e a possibilidade de cálculo de sismogramas sintéticos (Yang *et. al* 2010) pelo método da soma dos modos normais.

Metodologia/ Problema Investigado

A determinação das autofunções e autofrequências associadas às oscilações livres exige a resolução da equação de movimento no domínio da frequência (Dahlen & Tromp 1998):

$$-\omega^2\rho\vec{s} - \nabla\cdot\vec{T} + (4\pi G\rho^2 s_r)\hat{r} + \rho\nabla\phi + \rho g[\nabla s_r - (\nabla\cdot\vec{s} + 2r^{-1}s_r)\hat{r}] = \vec{0} \quad (1)$$

onde $\vec{s}$ é o campo de deslocamento, $s_r = \hat{r}\cdot\vec{s}$, ω a frequência angular ($\omega = 2\pi f$, f = frequência), $\vec{T}$ o tensor de tensão de Cauchy, ρ a densidade, ϕ o potencial gravitacional e G a constante da gravitação universal.

Usualmente, a equação pode ser transformada num sistema de equações diferenciais ordinárias que podem ser resolvidas por um método numérico (Runge-Kutta, por exemplo) e que utiliza a representação do campo de deslocamento por meio de funções harmônicas esféricas.

Uma alternativa que apresenta-se computacionalmente mais atraente é a utilização do método de Rayleigh-Ritz, que possibilita o cálculo dos pares ω e $\vec{s}$ por meio de técnicas de álgebra linear. Isto é possível graças ao fato de que cada autofunção $\vec{s}$ pode ser representada como uma combinação linear de funções de base:

$$\vec{s} = \sum_k q_k \vec{s}_k \quad (2)$$

que são resolvidas para os coeficientes de expansão q_k.

Assumindo um modelo de distribuição de densidades para a Terra com simetria esférica, sem rotação, perfeitamente elástico e isotrópico, definimos o funcional $\mathcal{I} = \mathcal{I}_S + \mathcal{I}_T$, onde $\mathcal{I}_S$ e $\mathcal{I}_T$ constituem as integrais esferoidais e toroidais:

$$\mathcal{I}_S = \int_0^a L_S(U,\dot{U},V,\dot{V})r^2 dr \quad (3)$$

$$\mathcal{I}_T = \int_0^a L_T(W,\dot{W})r^2 dr \quad (4)$$

definidas com base nas densidades Lagrangeanas esferoidal L_S e toroidal L_T. U, V e W são as autofunções radiais associadas aos modos esferoidais (U,V) e toroidais (W).

Portanto, basta a definição dos variacionais $\delta\mathcal{I}_S$ e $\delta\mathcal{I}_T$ para que sejam determinadas os modos de vibração (esferoidais ou toroidais) associados a uma determinada frequência angular ω.

No contexto apresentado acima, o presente trabalho pretende demonstrar a aplicação do método de Rayleigh-Ritz no estudo de alguns modos de vibração esferoidais da Terra. Maiores detalhes deste método e seu uso no estudo das oscilações livres da Terra podem ser encontrados em Dahlen e Tromp (1998).

Resultados

Para a realização deste trabalho, foram determinadas as oscilações livres esferoidais com base na distribuição de densidades predita pelo modelo PREM transversalmente isotrópico (Dziewonski & Anderson 1981).

Como parâmetros de cálculo, o espectro de frequências adotado foi entre 0 e 30mHz. A variação da ordem angular *l* foi entre 0 e 6000. Já a ordem radial *n* foi definida entre 0 e 100. As condições de contorno assumidas implicam na continuidade das trações e deslocamentos no interior da Terra, através de todas as suas interfaces, sendo nulas na superfície.

O método de Rayleigh-Ritz foi implementado com base no uso do pacote computacional MATLAB. O algoritmo construído segue a seguinte sequência de operações: i) leitura do modelo de densidades (PREM); ii) leitura dos parâmetros de cálculo das autofunções U e V, além de suas respectivas derivadas radiais $\dot{U}$ e $\dot{V}$ (*n*, *l* e *f*); iii) determinação das integrais esferoidais; iv) determinação do variacional $\delta\mathcal{I}_S$; v) resolução das funções de base; vi) cálculo das autofunções radiais que compõem o campo de deslocamento $\vec{s}$ de cada modo esferoidal $_nS_l$ com frequência específica *f*.

A Figura 1 representa diversos modos de oscilações esferoidais calculados com base no algoritmo desenvolvido com o uso do pacote computacional MATLAB.

Com base nos resultados, foi possível tecer as seguintes considerações:

1) O método de Rayleigh-Ritz mostrou-se eficiente, do ponto de vista numérico, já que as soluções mostraram-se estáveis;
2) O tempo computacional foi menor do que o verificado em simulações que envolveram códigos computacionais tradicionais (MINEOS e OBANI);
3) A versatilidade do método na investigação de estrutura interna da Terra, seja em todas as sua subdivisões ($_0S_0$;$_9S_0$), seja em regiões específicas como o manto ($_{45}S_2$), a interface núcleo-manto e a interafce núcleo externo-núcleo interno ($_6S_2$;$_{10}S_2$;$_{34}S_2$).

Discussão e Conclusões

A implementação computacional, via MATLAB, do método de Rayleigh-Ritz mostrou-se eficiente na determinação de alguns modos de vibração esferoidais da Terra.

De uma maneira geral, o tempo computacional de cálculo foi menor do que o utilizado por outros códigos baseados em integrações numéricas, para o cenário aqui explorado. Portanto, foi possível calcular um maior número de campos de deslocamentos, em determinadas frequências discretas, num tempo relativamente mais curto.

Etapas futuras desta pesquisa pretendem: i) adaptar o método para a determinação das oscilações toroidais; ii) adicionar o efeito da rotação; iii) adicionar o efeito da elipsidade do planeta; iv) adicionar o efeito da anisotropia e v) calcular sismogramas sintéticos por meio do método da soma dos modos normais, baseado nos valores de deslocamentos e frequências correspondentes.

Agradecimentos

Ao Departamento de Ciências Naturais da Universidade Federal do Espírito Santo pela estrutura computacional utilizada.

Referências

Aki, K. & Richards, P.G. 2002. Quantitative Seismology. 2nd ed. University Science Books, California, USA.

Dahlen, F.A. 1968. The normal modes of a rotating, elliptical Earth. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 16: 329-367.

Dahlen, F.A. & Tromp, J. 1998. Theoretical Global Seismology. Princeton University Books. Princeton, USA.

Dziewonski, A.M. & Anderson, D.L. 1981. Preliminary reference Eath model. Phys. Earth Planet. Int., 25: 29-356.

Laske, G., & Masters, G. 1999. Limits on the Rotation of the Inner Core from a new Analysis of Free Oscillations. Nature, 402: 66-68.

Masters, G., & Gilbert, F. 1981. Structure of the inner core inferred from observations of its spheroidal shear modes. Geophys. Res. Lett., 8: 569–571.

Yang, H-Y., Zhao, L. & Hung, S-H. 2010. Synthetic seismograms by normal-mode summation: a new derivation and numerical examples. Geophys. J. Int., 183: DOI: 10.1111/j.1365-246X.2010.04820.x

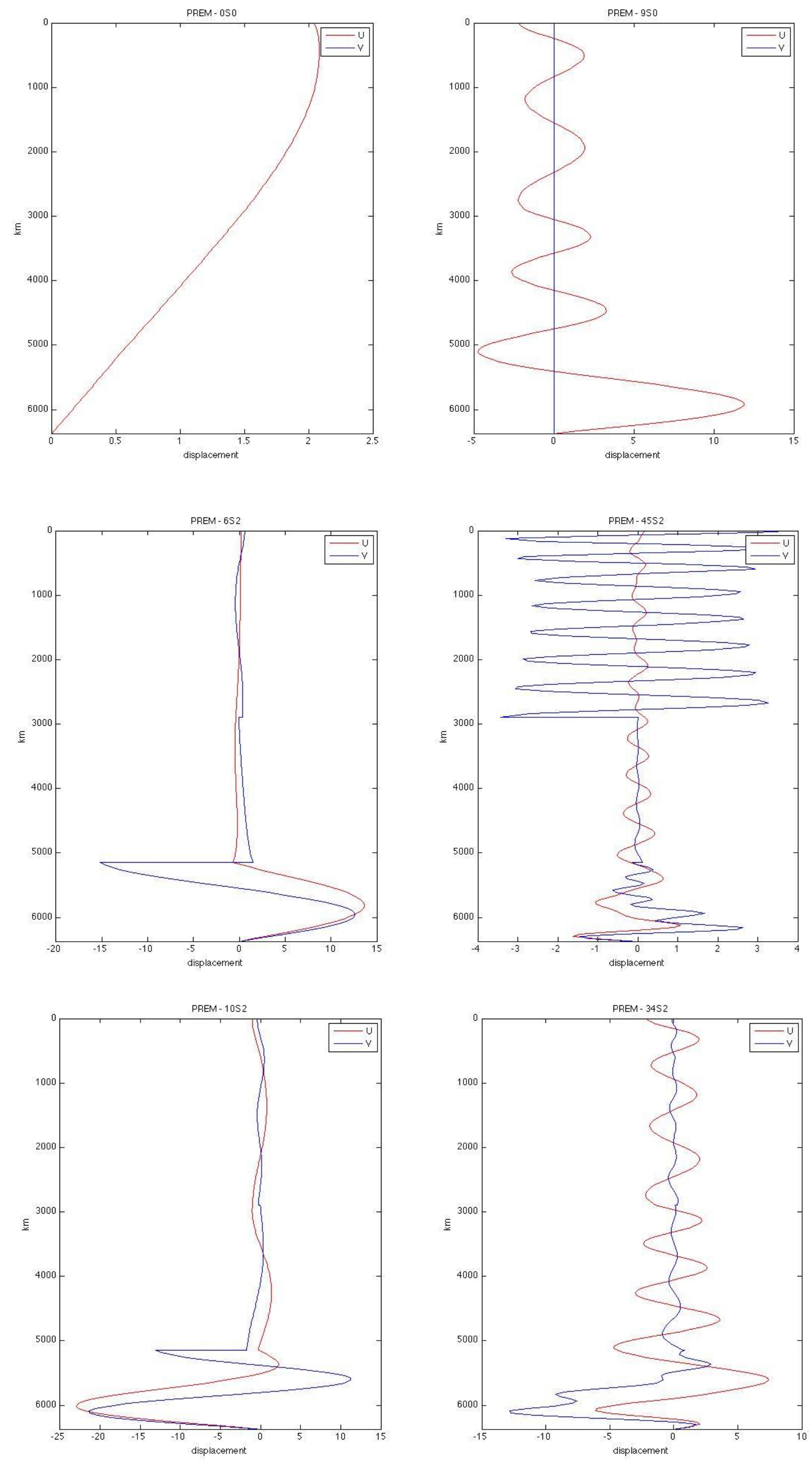

Figura 1 – autofunções radiais para alguns tipos de oscilações esferoidais da Terra, calculadas com base no método de Rayleigh-Ritz. Foi assumida a distribuição de densidades fornecida pelo modelo PREM. Valores de frequências teóricos: $_0S_0$ *(f=0.88mHz),* $_9S_0$ (f=8.27mHz), $_6S_2$ *(f=2.41mHz),* $_{45}S_2$ *(f=15.99mHz),* $_{10}S_2$ *(f=4.04mHz) e* $_{34}S_2$ *(f=12.35mHz).*