



Esquemas Simpléticos e Vetor de Poynting na Modelagem e Migração Reversa no Tempo

Edvaldo S. Araujo*, CPGG/UFBA, Reynam C. Pestana e Adriano W. G. Santos, CPGG/UFBA e INCT-GP/CNPQ

Copyright 2012, SBGF - Sociedade Brasileira de Geofísica Este texto foi preparado para a apresentação no V Simpósio Brasileiro de Geofísica, Salvador, 27 a 29 de novembro de 2012. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do V SimBGF, mas não necessariamente representa a opinião da SBGF ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGF.

ABSTRACT

In this work a new numerical solution for the wave equation based on the combination of the symplectic integrators and the expansion of the cosine function in a series of Chebyshev polynomials is presented. The method proposed here can march the wavefield in time, generating stable propagation of seismic waves free of numerical dispersion. Furthermore, the new numerical scheme provides the first time derivative of the wave equation solution without any increase in computational cost. Thus, the Poynting vector can also be calculated using this method in a more accurate procedure. Based on the Poynting vector information a new methodology is also proposed to separate the wavefields in its up and down components.

Through numerical examples, this work shows the applicability of the new method to extrapolate wavefield with time steps larger than the ones commonly used by pseudo-spectral methods, as well as the ability of this symplectic method to successfully handle Poynting vector calculations.

INTRODUÇÃO

Na literatura, a migração reversa no tempo (reverse time migration - RTM) tem sido implementada através da solução da equação da onda proveniente de vários métodos matemáticos. Dentre os métodos explícitos, tem-se: diferenças finitas (finite difference - FD), que faz uso da expansão de Taylor (Etgen, 1986); o método de expansão rápida (rapid expansion method - REM), que faz uso da expansão de Chebyshev (Kosloff et al., 1989) e o método "two-step explicit marching" (Soubaras e Zhang, 2008), que faz uso duma expansão polinomial. Uma classe de métodos que também podem ser usados na RTM são os integradores simpléticos.

Em matemática, um integrador simplético (symplectic

integrator - SI) é um esquema de integração numérica para um grupo específico de equações diferenciais relacionadas com a mecânica clássica e a geometria simplética (Yoshida, 1990). Integradores simpléticos formam uma subclasse de integradores geométricos que, por definição, são transformações canônicas. Esses esquemas são amplamente utilizados em dinâmica molecular, mecânica celestial e em outras áreas da Física. Na RTM os esquemas simpléticos também podem ser utilizados para calcular a solução analítica do campo de ondas e a sua derivada temporal. Um aspecto dos esquemas simpléticos é que o campo calculado é usado na mesma iteração para calcular a derivada temporal do campo. Essa particularidade permite criar um mecanismo para mudar o sentido de propagação do campo de ondas. Esse mecanismo é útil nas condições de contorno absorventes (Bonomi et al., 1998). Os esquemas simpléticos também é uma opção interessante para o cálculo do vetor de Poynting, uma vez que esses métodos numéricos já fornecem a derivada temporal do campo de ondas sem nenhum aumento na demanda computacional.

Neste trabalho, apresenta-se novos métodos numéricos para extrapolar o campo de ondas na RTM. Esses métodos são simpléticos e utilizam o método de expansão rápida. Também mostra-se um novo procedimento utilizando o vetor de Poynting para separar o campo de ondas, antes de realizar a condição de imagem na migração reversa no tempo para dados de famílias de fonte comum. Além disso, apresenta-se os resultados da RTM utilizando um dos esquemas simpléticos combinado com o REM.

SISTEMA HAMILTONIANO DA EQUAÇÃO DA ONDA

Um sistema Hamiltoniano é um sistema de equações ordinárias com a seguinte forma (Chen, 2009):

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}},\end{aligned}\quad (1)$$

onde \vec{x} e \vec{p} são vetores n dimensionais das coordenadas e momentos generalizados respectivamente, t (tempo) é a variável independente e $H = H(\vec{x}, \vec{p})$ é a função Hamiltoniana. O conjunto das coordenadas da posição e do momento (\vec{x}, \vec{p}) são chamadas de coordenadas canônicas. O sistema Hamiltoniano pode também ser escrito

na forma matricial e nesta forma é fácil observar a estrutura simplética (McLachlan e Quispel, 2006), isto é:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Considerando um sistema de equações diferenciais regido pelo Hamiltoniano

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = T(\vec{p}) + V(\vec{x}), \quad (3)$$

onde $T(\vec{p})$ é a energia cinética e $V(\vec{x})$ é o potencial, as equações do movimento para uma partícula de massa unitária são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \vec{p}, \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = \vec{f}, \end{aligned} \quad (4)$$

onde \vec{f} é o vetor força.

A equação da onda

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 P, \quad (5)$$

onde $P(x, y, z)$ é o campo de pressão e $c(x, y, z)$ é a velocidade de propagação da onda no meio, também pode ser reescrita usando a formulação Hamiltoniana, ou seja (Bonomi et al., 1998):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= Q, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= c^2 \nabla^2 P. \end{aligned} \quad (6)$$

A equação da onda (6) permite usar uma família de métodos simpléticos para realizar a integração no tempo. Segundo Skell et al. (1997), os métodos simpléticos preservam certas invariantes do sistema Hamiltoniano, funcionam com notável precisão para intervalos longo de integração e são estáveis para sistemas lineares onde o tamanho do passo na extrapolação é suficientemente pequeno.

Yoshida (1990) apresentou soluções (integradores simpléticos) para a equação (1) e que podem ser usadas para a equação (6). Uma dessas soluções é (método Stömer-Verlet):

$$\begin{aligned} Q^{(n+\frac{1}{2})} &= Q^{(n)} + \frac{1}{2} \Delta t c^2 \nabla^2 P^{(n)}, \\ P^{(n+1)} &= P^{(n)} + \Delta t Q^{(n+\frac{1}{2})}, \\ Q^{(n+1)} &= Q^{(n+\frac{1}{2})} + \frac{1}{2} \Delta t c^2 \nabla^2 P^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Todavia, o intervalo de tempo Δt utilizado para a solução numérica dado em (7) deve ser pequeno, em virtude da condição de estabilidade e dispersão numérica. Para

superar esse obstáculo, apresenta-se um novo método numérico que tem origem na solução analítica da equação (5). Segundo Araújo e Pestana (2010), essa solução é dada por:

$$P(t + \Delta t) + P(t - \Delta t) = 2 \cos(L\Delta t) P(t), \quad (8)$$

com $L^2 = -c^2 \nabla^2$.

Utilizando o REM (Kosloff et al., 1989) em (8), resulta em:

$$\begin{aligned} &P(t + \Delta t) + P(t - \Delta t) \\ &= 2 \sum_{(k=0)}^M C_{2k} J_{2k}(\Delta t R) Q_{2k} \left(\frac{iL}{R} \right) P(t), \end{aligned} \quad (9)$$

sendo $C_0 = 1$ e $C_k = 2$ para $k \neq 1$, J_k representa a função de Bessel de ordem k , Q_k são os polinômios modificados de Chebyshev e para a propagação da onda em 2D, o valor de R é aproximadamente dado por:

$$R = \pi c_{max} \sqrt{\left(\frac{1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{1}{dz} \right)^2}, \quad (10)$$

onde c_{max} é a velocidade máxima na malha, dx e dz são os espaçamentos da malha (Tal-Ezer, 1986).

A equação (8) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= Q, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= H(P^n), \end{aligned} \quad (11)$$

com

$$H(P^n) = \frac{2}{(\Delta t)^2} [\cos(L\Delta t) - 1] P^n. \quad (12)$$

Usando o REM e o método Stömer-Verlet na equação (11) tem-se um novo método numérico denominado de Stömer-Verlet-Rem, ou seja:

$$\begin{aligned} P^{(n+1)} &= P^{(n)} + \Delta t Q^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{2} G(P^n), \\ Q^{(n+1)} &= Q^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} [G(P^n) + G(P^{n+1})], \end{aligned} \quad (13)$$

onde

$$G(P^n) = \frac{2}{(\Delta t)^2} \left[\sum_{(k=0)}^M C_{2k} J_{2k} Q_{2k} - 1 \right] P^n. \quad (14)$$

O esquema numérico (13) funciona praticamente igual ao esquema (9) no que diz respeito ao uso da expansão de Chebyshev. Apenas na primeira iteração é necessário calcular a expansão duas vezes. O método fornece tanto o campo P^{n+1} quanto a derivada do campo em relação ao tempo, que é Q^{n+1} . Além disso, o interessante é que o campo P^{n+1} calculado é usado na mesma iteração para calcular o Q^{n+1} . Essa característica permite criar

um mecanismo para inverter o sentido de propagação do campo de ondas. Esse mecanismo é útil nas condições de contorno absorventes (Bonomi et al., 1998).

Para que o método numérico (13) funcione de forma estável, pode-se mostrar que é preciso satisfazer a seguinte condição de estabilidade:

$$\sum_{k=0}^M C_{2k} J_{2k} Q_{2k} \leq 1. \quad (15)$$

A expressão (15) sempre ocorre se $M = \infty$, uma vez que a expansão representa a função cosseno. Na prática, a expansão de Chebyshev é truncada. Assim, é preciso garantir que o número de termos usados da série forneça uma boa aproximação para que a extrapolação do campo de ondas ocorra de forma estável. Tal-Ezer (1986) menciona que a expansão converge para $M \geq R\Delta t$.

Usando o integrador simplético denominado de método Euler e o REM em (11) tem-se o seguinte resultado (Euler-Rem):

$$\begin{aligned} P^{(n+1)} &= P^{(n)} + \Delta t Q^{(n)}, \\ Q^{(n+1)} &= Q^{(n)} + \Delta t G(P^{n+1}). \end{aligned} \quad (16)$$

A equação (16) é mais uma alternativa para se extrapolar no tempo o campo de ondas. O esquema simplético apresentado por Bonomi et al. (1998), também pode ser usado em (11). A diferença entre os integradores simpléticos está na ordem da integração. Quanto maior for a ordem, mais preciso é o resultado, isto é, a solução numérica está mais próxima da solução exata.

Os esquemas simpléticos são de grande interesse na RTM para dados não empilhados. Nesse tipo de migração usa-se normalmente a condição de imagem de correlação cruzada no “lag” zero entre o campo de ondas da fonte extrapolado e o campo de ondas do receptor depropagado. Esse tipo de condição de imagem acaba correlacionando todo tipo de ondas, inclusive as ondas diretas, as ondas de retorno (turning waves) que não são provenientes de reflexões e as ondas retroespalhadas. A correlação dessas ondas são responsáveis por artefatos na imagem migrada (Yoon e Marfurt, 2006). Para eliminar esses artefatos, várias estratégias tem sido apresentadas na literatura. Yoon e Marfurt (2006) desenvolveram um filtro baseado no vetor de Poynting e Bulcão (2004) apresentou a idéia de utilizar o vetor de Poynting para separar os campo de ondas em ascendente e descendente e usar apenas a parte descendente desses campos na condição de imagem.

Para o cálculo do vetor de Poynting \vec{S} precisa-se tanto da derivada temporal do campo de ondas como do gradiente de campo, ou seja (Bonomi et al., 1998):

$$\vec{S} = -Q\nabla P. \quad (17)$$

Os esquemas simpléticos já fornecem naturalmente a derivada temporal do campo de ondas e com uma boa precisão. Assim, só é preciso calcular o gradiente do campo, a fim de obter o vetor de Poynting de maneira precisa. Uma outra alternativa foi apresentado por Tesmer (2011). Ele usa a derivada temporal analítica de (8) e o gradiente do campo para calcular \vec{S} .

Nas Figuras 1(a) e 1(b) têm-se as componentes horizontal e vertical do vetor \vec{S} em um determinado instante de tempo. Esses resultados foram gerados considerando a fonte no centro de um modelo com velocidade constante. Na Figura 2(a) apresenta-se o modelo Bp, que é um modelo estruturalmente complexo, com um corpo de sal no meio do modelo. Na Figura 2(b) tem-se o snapshot do campo de ondas da fonte, em um determinado instante de tempo, no modelo Bp. Nas Figuras 3(a) e 3(b) têm-se os snapshots das componentes do vetor de Poynting \vec{S} para o modelo Bp, no mesmo instante de tempo do snapshot mostrado na Figura 2(b).

No trabalho apresentado por Bulcão (2004), utiliza-se o vetor de Poynting normalizado e a derivada temporal da energia para fazer a separação do campo de ondas. Neste trabalho, apresenta-se uma nova forma de fazer a separação do campo de ondas. Para isso, calcula-se o ângulo da direção de propagação do campo de ondas, através do vetor de Poynting, ou seja:

$$\theta = \arctan\left(\frac{S_z}{S_x}\right), \quad (18)$$

e com esta informação escolhe-se a abertura angular que se deseja. A grande vantagem desse procedimento é que não se modifica as amplitudes do campo de ondas. Nas Figuras 4(a) e 4(b) mostra-se os resultados da aplicação dessa metodologia no campo de ondas, em um determinado instante de tempo, em um meio onde a fonte sísmica está situada no centro do modelo. Já as Figuras 5(a) e 5(b) mostram o resultado da aplicação dessa técnica no snapshot da Figura 2(b).

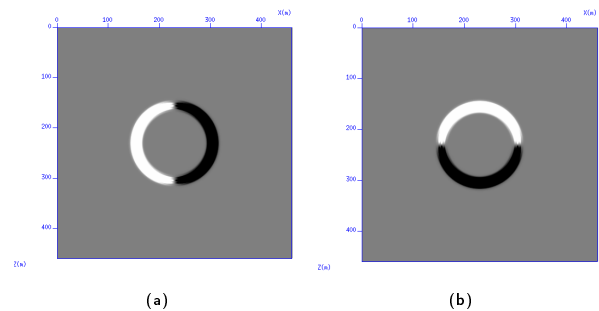


Figura 1: (a) Snapshot S_x e (b) snapshot S_z .

RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO

Na RTM pós empilhamento, o esquema (13) foi testado no modelo sintético SEG-EAGE. O campo de velocidade é mostrado na Figura 6, com velocidades variando de

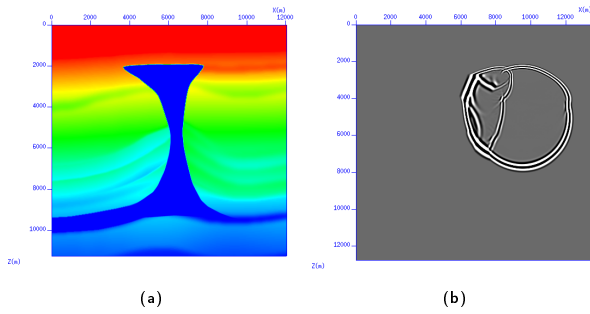


Figura 2: (a) Modelo Bp e (b) snapshot do modelo Bp.

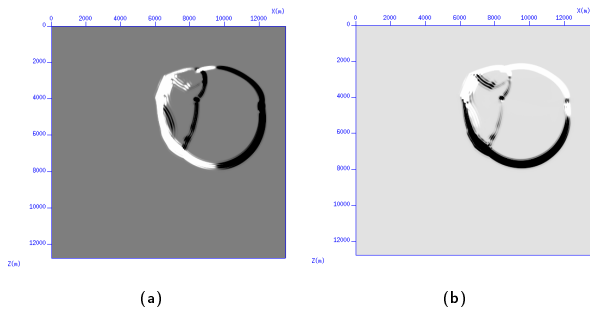


Figura 3: Modelo BP: (a) snapshot S_x e (b) snapshot S_z .

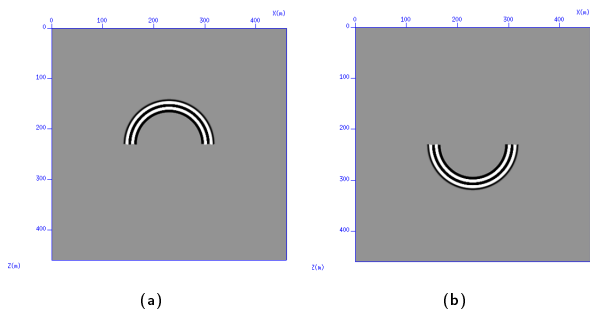


Figura 4: Snapshot: (a) ascendente e (b) descendente.

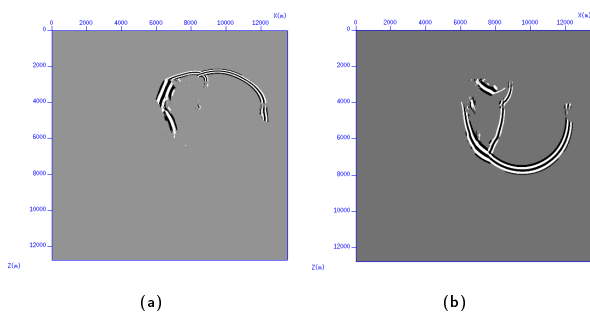


Figura 5: Snapshot do modelo BP: (a) ascendente e (b) descendente.

1524 m/s a 4481 m/s. O espaçamento da malha nas direções horizontal (x) e vertical (z) é de 0,012 km. O intervalo de amostragem temporal é de 8 ms, com 626 amostras por traço. O resultado da RTM dos dados sísmicos desse modelo encontra-se na Figura 9. Esse resultado mostra a eficiência do esquema (13) no imageamento das principais feições geológicas e a capaci-

dade do método de realizar a extrapolação do campo de ondas com passos grandes no tempo de maneira estável e sem ser afetado pela dispersão numérica.

Na Figura 7 tem-se o modelo Marmousi. Esse modelo baseia-se na geologia da bacia de Cuanga em Angola. O modelo estrutural é dominado por falhas de crescimento, as quais se levantam desde um truncamento de sal até chegar à complicada estrutura de velocidade na parte superior do modelo. A malha do campo de velocidade possui 369 pontos na direção horizontal (x) por 375 na direção vertical (z) e os espaçamentos são $dx = 25$ m e $dz = 8$ m. O resultado da RTM, utilizando o esquema (13) e as 240 famílias de tiros, encontra-se na Figura 10 e mostra que o método numérico (13) teve um bom desempenho em imagear as feições geológicas do modelo Marmousi. Além disso, o esquema simplético utilizou o intervalo de amostragem temporal de 4 ms, intervalo original desse dado sísmico, e não apresentou problemas de estabilidade e dispersão numérica, uma vez que o mesmo utiliza o REM na aproximação da função $\cos(L\Delta t)$.

Os dados sintéticos do modelo SIGSBEE2A também foram utilizados para validar o esquema (13). Esse modelo baseia-se na estrutura geológica real do Golfo do México, desenvolvido pelo consórcio SMAART JV, e simula uma estrutura geológica complexa caracterizada por uma mudança rápida nas feições geológicas. Esse modelo consiste de um corpo de sal com muitas características geométricas complexas em uma seção sedimentar de contraste de velocidade relativamente baixo. Na Figura 8 apresenta-se o campo de velocidade desse modelo, onde pode se observar a forma do corpo de sal e a variação do campo de velocidade. Este campo possui uma malha de 1360 pontos na direção horizontal (x), com espaçamentos $dx = 22,86$ m e 600 pontos na direção vertical (z), com espaçamento $dz = 15,24$ m. Na estratigrafia desse modelo pode se observar além do corpo de sal, a disposição dos refletores, das falhas e dos pontos de difração (Neto et al., 2005). Na Figura 11, apresenta-se o resultado da RTM utilizando 500 tiros do modelo SIGSBEE2A. Esse resultado também confirma o bom desempenho do esquema simplético (13), pois conseguiu imagear bem o corpo de sal e os refletores presentes no modelo. Os principais refletores e as falhas abaixo do corpo de sal foram reconstituídos com sucesso. Os pontos difratores também foram completamente colapsados. O método numérico utilizou o intervalo de amostragem temporal de 8 ms, para realizar a extrapolação do campo de ondas, e não apresentou problemas de estabilidade e dispersão numérica.

CONCLUSÕES

Os novos esquemas numéricos apresentados neste trabalho mostraram-se ser uma boa alternativa para RTM. Em particular, o esquema (13) não ficou limitado a um

determinado intervalo de amostragem temporal devido a problemas de estabilidade e dispersão numérica. Além disso, os métodos simpléticos são interessantes para o cálculo mais preciso do vetor de Poynting, uma vez que esses esquemas fornecem naturalmente a derivada temporal do campo de ondas.

Neste trabalho também foi apresentado um novo procedimento para realizar a separação do campo de ondas em qualquer direção usando a abertura angular desejada, proveniente do cálculo do ângulo da direção de propagação do campo de ondas, através do vetor de Poynting. Uma das vantagens dessa técnica é que a amplitude do campo de ondas não é alterada durante o processo de separação. Com isso, os campos descendentes podem ser usados na condição de imagem a fim de melhorar a qualidade da imagem migrada.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CPGG/UFBA, CNPq e INCT-GP/CNPq pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho. Também à CAPES pelo suporte, através de bolsa de doutorado.

REFERÊNCIAS

- Araújo, E. S., e Pestana, R. C., 2010, Análise dos métodos de diferenças finitas e expansão rápida na migração reversa no tempo: *RBGf*, **28(4)**, 723–739.
- Bonomi, E., Brieger, L., Nardone, C., e Pieroni, E., 1998, 3d spectral reverse time migration with no-wraparound absorbing conditions: *Geophysics Area CRS4*.
- Bulcão, A., 2004, Modelagem e migração reversa no tempo empregando operadores elásticos e acústicos: Tese de Doutorado-UFRJ:PEC/COPE.
- Chen, J., 2009, Lax-wendroff and nystrom methods for seismic modeling: *Geoph. Prosp.*, **57**, 931–941.
- Etgen, J., 1986, High-order finite-difference reverse time migration with the 2-way non-reflecting: *SEP48*., pages 133–146.
- Kosloff, D., Filho, A., Tessmer, E., e Behle, A., 1989, Numerical solution of the acoustic and elastic wave equation by new rapid expansion method: *Geoph. Prosp.*, **37**, 383–394.
- McLachlan, R. I., e Quispel, G. R. W., 2006, Geometric integrators for odes: *J.Phys. A:Math.Gen.*, **39**, 5251–5285.
- Neto, C. A. M., Pestana, R. C., e Aldunate, G. C., 2005, Migração pré-empilhamento em profundidade no domínio da frequência de seções de ondas planas.: *RBGf*, **23(4)**, 359–370.
- Skell, R. H., Zhang, G., e Schlick, T., 1997, A family of symplectic integrators: stability, accuracy, and molecular dynamics applications, *society of industrial and applied mathematics: J. on Numerical Analysis*, **18**, 203–222.
- Soubaras, R., e Zhang, Y., 2008, 2008: In: 70th EAGE Conference and Exhibition, Rome/Italy, EAGE.
- Tal-Ezer, H., 1986, Spectral methods in time for hyperbolic problems. *society of industrial and applied mathematics.: J. on Numerical Analysis*, **23**, 11–20.
- Tessmer, E., 2011, Using the rapid expansion method for accurate time-stepping in modeling and reverse-time migration: *Geophysics*, **76**, S177–S185.
- Yoon, K., e Marfurt, K. J., 2006, Reverse-time migration using the poynting vector: *Explo. Geoph.*, **37**, 102–107.
- Yoshida, H., 1990, Construction of higher order symplectic integrators: *Physics Letters A*, **150**, 262–268.

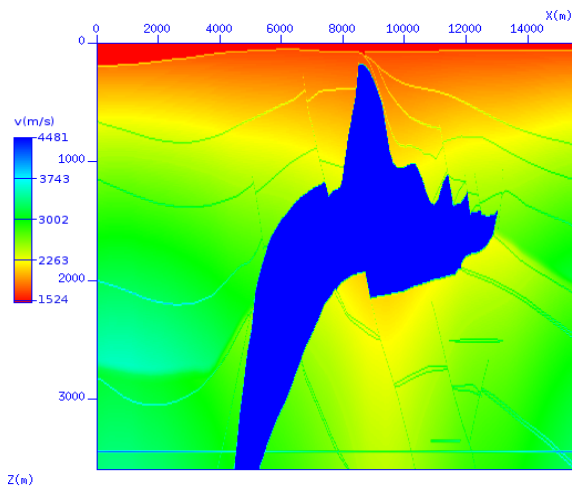


Figura 6: Modelo SEG-EAGE - campo de velocidade.

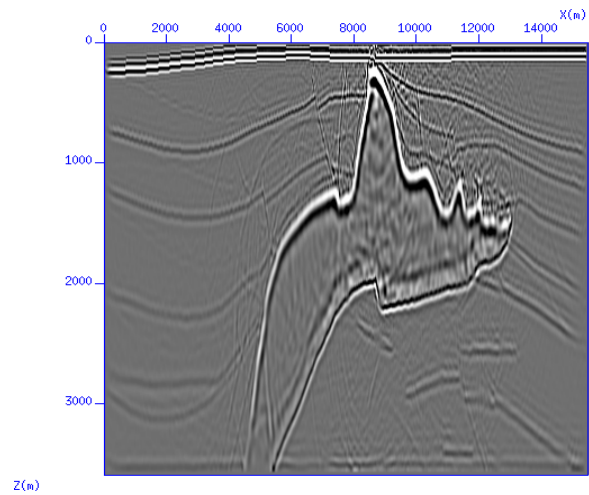


Figura 9: Resultado da RTM do modelo SEG-EAGE.

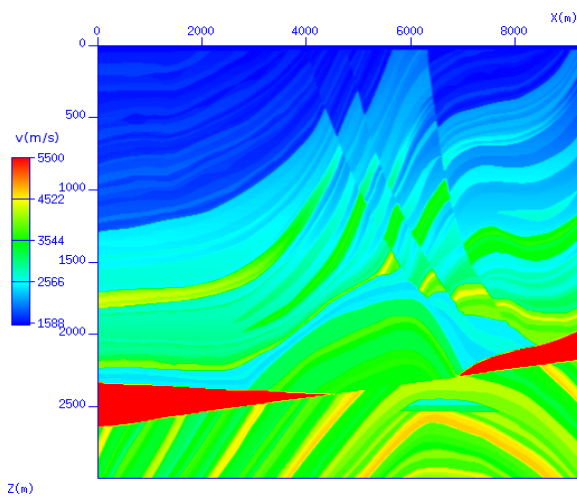


Figura 7: Modelo Marmousi - campo de velocidade.

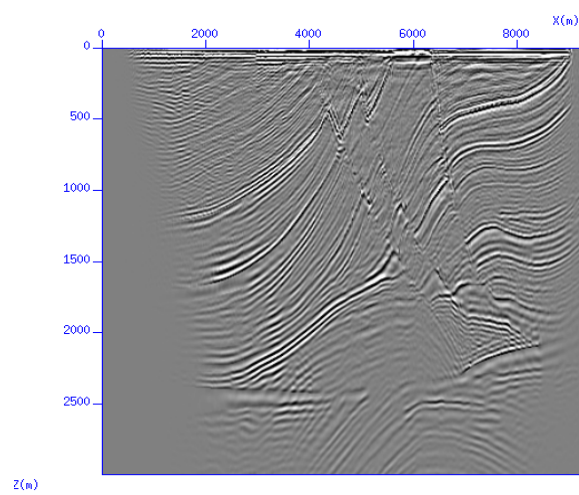


Figura 10: Resultado da RTM do modelo Marmousi.

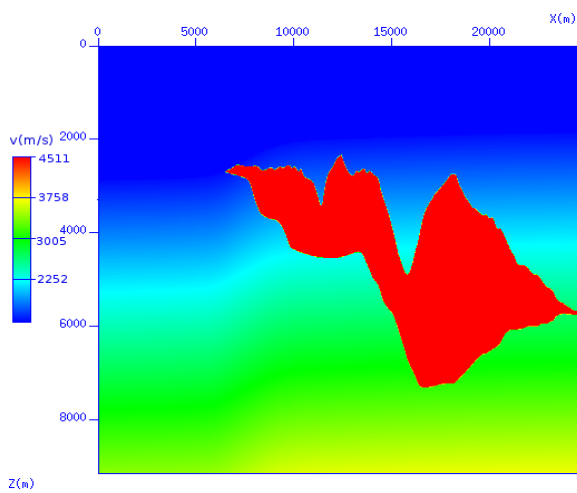


Figura 8: Modelo SIGSBEE2A - campo de velocidade.

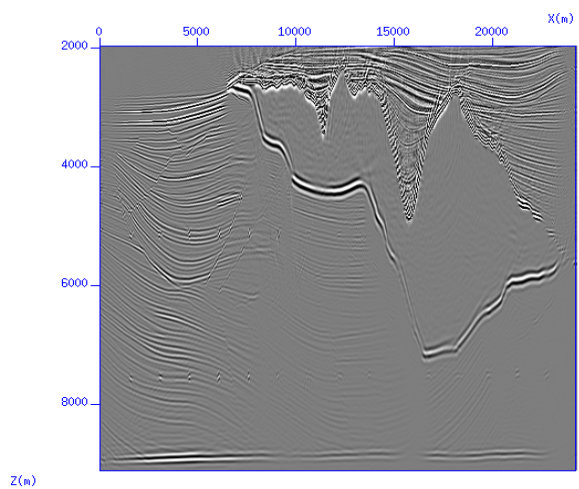


Figura 11: Resultado da RTM do modelo SIGSBEE2A.