

AS ALTURAS GEOIDAIS DOPPLER E A SEPARAÇÃO ELIPSÓIDE-ESFERÓIDE DE REFERÊNCIA

DENIZAR BLITZKOW e NELSI CÔGO DE SÁ

Instituto Astronômico e Geofísico — Universidade de São Paulo
Caixa Postal 30627 — 01051 — São Paulo — SP

The spherical harmonic coefficients represent a model of the gravitational potential or a geopotential model truncated at the order l . They represent a surface that is called a reference spheroid. The separation between the ellipsoid and the reference spheroid for GEM9, GEM10, GEM10A and GEM10B models, have been computed. The zero order undulation using 162 Doppler undulation has been derived. The results show a slightly better fit of GEM9 model to the Doppler undulations than the other models considered.

INTRODUÇÃO

A obtenção dos coeficientes das harmônicas esféricas, os quais definem modelos do campo gravitacional, muito se beneficiou com o estudo do movimento dos satélites artificiais. Com efeito, os coeficientes de baixa ordem do potencial gravitacional puderam ser determinados com uma precisão até então difícil ou até impossível de ser atingida somente com dados terrestres.

A viabilidade de aplicação do efeito Doppler-Fizeau no rastreamento de um satélite, e daí a obtenção da posição de um observador sobre a superfície da Terra, tem sido importante no estabelecimento de apoio planimétrico. O Sistema de Posicionamento Global conhecido por Sistema GPS (Global Positioning System) ou NAVSTAR (Navigation Satellite Timing and Ranging), ora em fase de desenvolvimento e testes, poderá oferecer outras possibilidades além da aplicação do efeito Doppler-Fizeau.

Estas duas aplicações constituem exemplos do grande aprimoramento que a era dos satélites artificiais trouxe para a Geodésia em vários de seus campos de aplicação. Em específico, as tais aplicações fornecem elementos que desempenham um papel preponderante nas atuais técnicas de determinação das alturas geoidais a partir de dados heterogêneos.

Com efeito, os modelos do potencial gravitacional permitem o cálculo da componente de longo comprimento de onda da altura geoidal em particular ou de qualquer uma das componentes do campo anômalo em geral.

A altura geoidal Doppler, assim chamada quando derivada das observações de satélites artificiais utilizando o efeito Doppler-Fizeau, constitui uma grandeza geométrica, até certo ponto independente do campo gravitacional. Por esta razão, entre outras aplicações, serve de controle na elaboração de metodologias que calculam as alturas geoidais em função de elementos ligados ao campo gravitacional, tais como, os coeficientes das harmônicas esféricas e as anomalias da gravidade.

O presente trabalho propõe-se a estabelecer uma comparação entre a separação elipsóide-esferóide de referência e as alturas geoidais Doppler para vários modelos do campo gravitacional e daí a obtenção do termo de ordem zero da altura geoidal para cada modelo.

ALTURAS GEOIDAIS DOPPLER

A relação matemática entre o número de ciclos da frequência de batimento em um determinado intervalo de tempo e a diferença das distâncias estação-satélite correspondentes aos instantes extremos daquele intervalo, permite o cálculo das coordenadas X , Y , Z do centro elétrico da antena de uma estação de rastreamento do satélite, num referencial cartesiano geocêntrico. Estas coordenadas podem ser transformadas em coordenadas geodésicas ϕ , λ e H mediante relações conhecidas (Gemaël, 1981, p. 4.3).

A altura geoidal absoluta N pode ser obtida a partir da altitude geométrica H através da relação

$$N = H - h \quad (1)$$

A altura geoidal relativa a um elipsóide local também pode ser calculada com (1) desde que parâmetros apropriados de translação, rotação e escala sejam aplicados às coordenadas cartesianas X , Y , Z antes da transformação para o terno geodésico (ϕ , λ , H).

Neste trabalho foram utilizadas 162 alturas geoidais Doppler, que serão representadas pelo símbolo N_D , obtidas junto à Superintendência de Geodésia da Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Foram fornecidas diretamente as coordenadas ϕ , λ e a altura N_D . De acordo com as informações daquele órgão a altitude ortométrica utilizada no cálculo de N_D foi obtida através de nivelamento geométrico de precisão e as observações Doppler deste conjunto de pontos reduzidas com

as chamadas efemérides precisas. Estas, por sua vez, acham-se vinculadas ao referencial denominado NWL-9D suposto geocêntrico e com o eixo Z orientado segundo o CIO (Conventional International Origin). Este referencial necessita de uma correção em escala de $-0,4$ ppm e uma rotação em longitude de $-0,65''$ (Lachapelle, 1979, p. 80).

A Superintendência de Geodésia aplica os seguintes parâmetros de translação (Ferrari, 1979):

$$\begin{aligned} TX &= 80,80 \text{ m,} \\ TY &= 14,81 \text{ m,} \\ TZ &= 44,01 \text{ m,} \end{aligned}$$

às coordenadas cartesianas geocêntricas X, Y, Z, mas não aplica nenhum fator de escala ou rotação.

Estes parâmetros de translação necessitam ser recalculados, havendo necessidade de incluir no cálculo parâmetros de rotação e escala. Realmente, informações mais recentes e dados mais atualizados permitem obter valores mais apropriados dos parâmetros de transformação do NWL-9D para o Sistema Geodésico Brasileiro. A Superintendência de Geodésia vem reunindo os elementos necessários com vistas a esta tarefa. Por ora, vinculam-se os resultados aos parâmetros de translação mencionados, sem correção suplementar de escala ou rotação.

MODELO DO CAMPO GRAVITACIONAL

O potencial gravitacional pelo fato de satisfazer a equação de Laplace, pode ser desenvolvido em uma série do tipo (Blitzkow & Sá, 1982)

$$W_g(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \bar{J}_{nm} Y_{nm}^C + \bar{K}_{nm} Y_{nm}^S \right] \quad (2)$$

onde

$$\begin{aligned} Y_{nm}^C &= \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda, \\ Y_{nm}^S &= \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda, \end{aligned} \quad (3)$$

representam as funções próprias da equação de Laplace em coordenadas esféricas e são chamadas funções harmônicas esféricas. A barra indica grandezas plenamente normalizadas. Os símbolos J_{nm} e K_{nm} são os chamados coeficientes das (funções) harmônicas esféricas.

A expressão da altura geoidal em função das harmônicas esféricas é (Blitzkow & Sá, 1982)

$$\begin{aligned} N(\phi, \lambda) &\cong -R \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^N) \cos m\lambda + \\ &+ \bar{K}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos\theta), \end{aligned} \quad (4)$$

onde R é o raio médio da Terra e o índice N indica grandezas vinculadas à Terra normal. O sinal de aproximado se justifica tendo em vista a aproximação esférica. Por razões conhecidas (Blitzkow & Sá, 1982) foram eliminados em (4) os termos de ordem zero e um.

Os modelos do campo gravitacional são obtidos com o cálculo dos coeficientes das harmônicas esféricas. Este cálculo é feito a partir da análise do movimento dos satélites artificiais combinando ou não com dados terrestres. Os modelos mais importantes determinados até o momento são: GEM9, GEM10, GEM10B, GEM10C e OSU81.

Os modelos de baixa ordem do potencial gravitacional, assim chamados os conjuntos de coeficientes das harmônicas esféricas restritos a uma determinada ordem ℓ , definem superfícies particulares denominadas **esferóides de referência** (Vanicek & Krakiwiski, 1982, p. 573) e representam superfícies intermediárias entre o elipsóide e o geóide (Fig. 1).

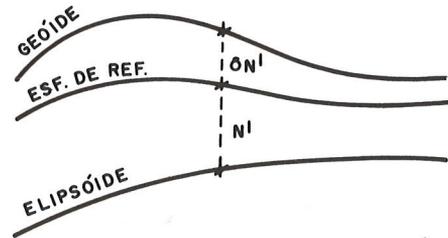


Figura 1 – Componentes da altura geoidal.

A expressão (4) pode ser escrita na seguinte forma (Blitzkow & Sá, 1982, p. 8)

$$\begin{aligned} N(\phi, \lambda) &\cong -R \sum_{n=2}^{\ell} \sum_{m=0}^n [(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^N) \cos m\lambda + \\ &+ \bar{K}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos\theta) - \\ &- R \sum_{n=\ell+1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{J}_{nm} \cos m\lambda + \\ &+ \bar{K}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta), \end{aligned} \quad (5)$$

ou de maneira abreviada

$$N(\phi, \lambda) \cong N_{\ell}(\phi, \lambda) + \delta N^{\ell}(\phi, \lambda), \quad (6)$$

onde N_{ℓ} representa a componente de longo comprimento de onda da altura geoidal e δN^{ℓ} a componente de curto comprimento de onda. Pela Fig. 1 N_{ℓ} traduz a separação entre o elipsóide e o esferaide de referência e δN^{ℓ} a separação entre o esferaide de referência e o geóide, definida em (Blitzkow & Sá, 1982) como **altura geoidal esférica**.

Dependendo da ordem $n = \ell$ do modelo do campo gravitacional disponível e da precisão exigida, a componente N_ℓ pode constituir uma aproximação razoável para a altura geoidal. A componente δN^ℓ , entretanto, pode ser calculada mediante uma modificação da função de Stokes (Blitzkow & Sá, 1982), que somada à componente N_ℓ constitui evidentemente uma melhor aproximação para N .

TERMO DE ORDEM ZERO DA ALTURA GEOIDAL

A expressão genérica da integral de Stokes tem a seguinte forma (Heiskanen & Moritz, 1979, p. 101)

$$N = \frac{K\delta M}{R\gamma} - \frac{\delta W}{\gamma} + \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (7)$$

onde

$$N_0 = \frac{K\delta M}{R\gamma} - \frac{\delta M}{\gamma} \quad (8)$$

é o termo de ordem zero da altura geoidal normalmente chamado ondulação de ordem zero (Lachapelle, 1979). Se o elipsóide de referência tiver o mesmo potencial do geóide e a mesma massa da Terra, N_0 será nulo.

Existem fórmulas alternativas para o cálculo de N_0 (Heiskanen & Moritz, 1979; Rumel & Rapp, 1976)

$$N_0 = -\frac{R}{\gamma} \Delta g_0 + \frac{K\delta M}{2\gamma R}, \quad (9)$$

agora em função do termo de ordem zero da anomalia da gravidade Δg_0 .

A principal dificuldade no cálculo da altura geoidal com a integral de Stokes, a menos do termo de ordem zero, é a inexistência de medidas gravimétricas em grandes regiões da superfície terrestre. Assim, na prática, são feitas diversas aproximações para o cálculo de N utilizando diferentes informações do campo gravitacional, obtendo-se uma altura geoidal que neste trabalho se denomina genericamente de "altura geoidal gravimétrica" e é representada pelo símbolo N_g . Estas aproximações consistem, por exemplo, em restringir a integral de Stokes a uma calota de raio ψ_0 . Como foi frisado, a própria componente de longo comprimento de onda pode representar uma aproximação para N . Uma alternativa também usada consiste em utilizar a expressão (5) calculando a componente δN^ℓ por uma aproximação suficiente, seja modificando a função de Stokes como mencionado anteriormente, seja aplicando o método de colocação por mínimos quadrados mediante a escolha de um modelo conveniente para a função covariância (Lachapelle, 1979). Em cada um destes casos obtém-se uma superfície que evidentemente não é a do geóide, mas que dele se aproxima, ora mais ora menos. A cada uma destas superfícies pode-se ajustar um elipsóide denominado **elipsóide médio** (Lachapelle, 1979, p. 86) cujo semi-eixo maior é representado pelo símbolo a_{me} . Este elipsóide, em geral, difere do elipsóide de referência que, por hipótese, melhor se

adapta ao geóide e que neste trabalho admite-se como sendo o elipsóide do Sistema de Referência 1967; mas supõe-se que a diferença seja somente em termos do semi-eixo maior, conservando portanto o mesmo achatamento. A ondulação de ordem zero é interpretada, neste caso particular, como a diferença δ_a entre os semi-eixos maiores do elipsóide médio e do elipsóide de Referência 67 (Lachapelle, 1979, p. 86).

$$a_{me} = a_{REF67} + \delta_a$$

Esta interpretação é ilustrada na Fig. 2.

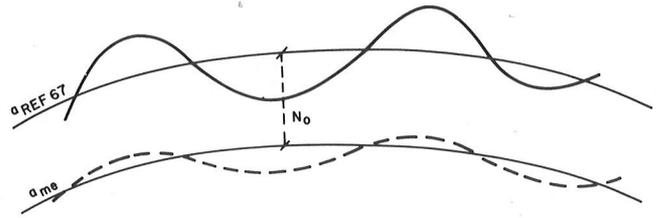


Figura 2 – Ondulação de ordem zero.

A superfície pontilhada da Fig. 2 representa uma das aproximações mencionadas anteriormente. No caso mais geral esta superfície não é paralela ao geóide. A explicação para isto é simples. Se a altura geoidal é aproximada por uma série de harmônicas esféricas truncada até o termo de ordem ℓ , por exemplo, esta superfície difere do geóide em termos de curtos comprimentos de onda lembrando o significado dado à equação (6). Por outro lado, se a altura geoidal for calculada através da fórmula de Stokes, truncada a uma distância esférica ψ_0 , a diferença entre as duas superfícies será em termos de longos comprimentos de onda, resultado de desprezar a região afastada. No caso em que se dispusesse de dados gravimétricos sobre toda a Terra, integrando o último termo de (7) sobre toda a esfera, as duas superfícies seriam paralelas e a interpretação seria aquela de Heiskanen & Moritz (1979, p. 103).

Uma tentativa de cálculo da ondulação de ordem zero para o modelo GEM10 foi feita por Prado (1982). O valor de N_0 não é citado diretamente, mas é calculado $W_0 = 62636830,20 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ e a partir daí o valor $KM_0 = 3,986017279 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ considerado valor válido para o elipsóide (Prado, 1982, p. 41). O valor de KM associado ao modelo GEM10 é $KM = 3,9860047 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ (Prado, 1982, p. 35), onde se admite $U_0 = W_0$, o que permite o cálculo de N_0 pelo primeiro termo da expressão de N na seção 4.5 da citada referência. Atribuindo para r_G e γ_0 os valores médios respectivos de $6.371.000 \text{ m}$ e $9,8 \text{ m/s}^2$, que constituem aproximações suficientes para o cálculo de N_0 , obtém-se o valor de $-20,1 \text{ m}$. Este é um valor compatível com aquele apresentado na Tabela 1 referente ao mesmo modelo.

Admitindo-se que as ondulações geoidais Doppler estejam com um fator de escala correto e que as altitudes usadas no cálculo de N_D sejam ortométricas ou suficientemente próximas de ortométricas, uma comparação entre as alturas geoidais N_D e as "alturas geoidais gravimétricas" N_g dadas por qualquer uma das aproximações mencionadas no início do presente parágrafo, permite o cálculo da ondulação de ordem zero (Lachapelle, 1979, p. 84).

$$N_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (N_{D_i} - \bar{N}_{g_i})}{n} \quad (10)$$

com N_D e \bar{N}_g supostamente corrigidos de eventual translação do centro do elipsóide.

Deve ser salientado que esta solução só tem sentido exato quando os dados forem globalmente distribuídos. O presente caso constitui uma tentativa de aproximação para N_0 , tendo em vista que os dados se limitem ao território nacional.

O erro médio quadrático, calculado através da expressão:

$$\sigma(\Delta N) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (N_{D_i} - N_{g_i})^2}{n - 1}} \quad (11)$$



Figura 3 — Distribuição dos pontos Doppler.

sendo N_g a altura geoidal gravimétrica corrigida do termo N_0 , dado por (10), constitui uma estimativa de quanto os modelos usados para o cálculo de N_g se ajustam às alturas geoidais Doppler.

RESULTADOS

Os modelos do campo gravitacional usados no presente trabalho foram: GEM9, GEM10, GEM10A e GEM10B. Assim, o que se denomina de altura N_g são as alturas geoidais dadas por (4), onde os coeficientes das harmônicas esféricas correspondem àqueles dos modelos acima.

A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos. A ondulação de ordem zero e o erro médio quadrático $\sigma(\Delta N)$ foram calculados pelas relações (10) e (11) respectivamente. O desvio máximo corresponde ao valor máximo da diferença entre a altura geoidal Doppler N_D e àquela obtida pelos coeficientes, N_g . A Fig. 3 mostra a distribuição dos pontos Doppler utilizados.

Tabela 1 — Ondulações geoidais de ordem zero.

Modelo	N_0	$\sigma\Delta N$	Desv. Máx.	a_{me}
GEM9	-18,8	2,9	-9,0	6378141,2
GEM10	-19,1	3,0	7,7	6378140,9
GEM10A	-19,0	3,0	7,7	6378141,0
GEM10B	-19,1	3,3	-8,9	6378140,9

Não se observa uma diferença muito grande no valor de N_0 entre os diversos modelos, como, aliás, era de se esperar. Realmente, a inclusão de termos de ordem superior tende simplesmente a ondular um pouco mais a superfície sem modificar sensivelmente o elipsóide melhor ajustado.

Analisando os histogramas das Figs. 4 a 7 observa-se que o modelo GEM9 é o que apresenta o maior número de desvios no intervalo $[-2, +2]$ seguido muito de perto pelo modelo GEM10. O modelo GEM9 foi obtido exclusivamente a partir da análise do movimento de satélites artificiais (Lerch et al., 1977). Nos modelos da série 10 foram incluídos dados terrestres que teoricamente deveriam melhorar estes modelos. Dados terrestres representados por anomalias médias sejam de $5^\circ \times 5^\circ$, sejam de $1^\circ \times 1^\circ$, nem sempre constituem um valor representativo para o bloco. Em muitas regiões e em específico no Brasil, muitos valores constituem uma interpolação e até uma extrapolação, dada a inexistência de medidas gravimétricas. Isto pode ser uma razão pela qual, no Brasil ao menos, o GEM10 não seja melhor do que o GEM9. Por outro lado, os modelos GEM10A e GEM10B incluíram em seu cálculo dados de radar altimetria (Lerch et al., 1981) obtidos pelos satélites da série GEOS. Tem sido observado que este fato aparentemente teria distorcido um pouco os referidos modelos sobre os continentes, ajustando-os melhor sobre os oceanos.

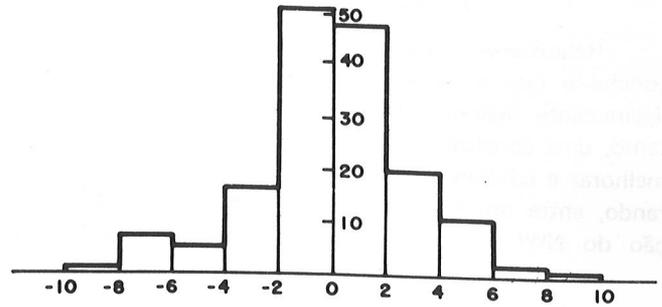


Figura 4 — Histograma relativo ao modelo GEM9.

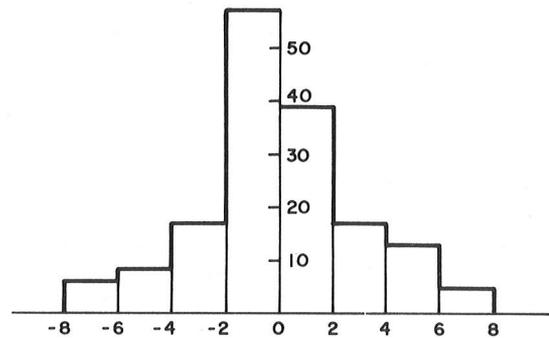


Figura 5 — Histograma relativo ao modelo GEM10.

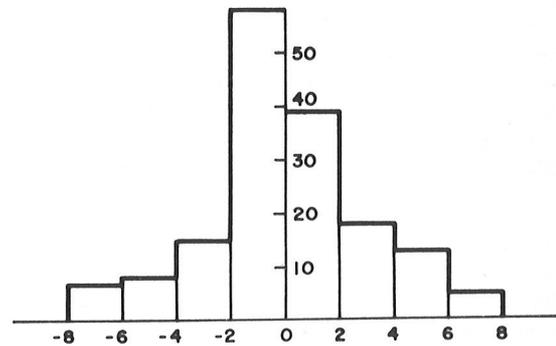


Figura 6 — Histograma relativo ao modelo GEM10A.

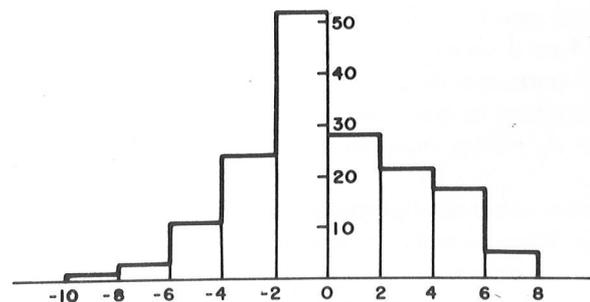


Figura 7 — Histograma relativo ao modelo GEM10B.

CONCLUSÃO

Relativamente a estes 162 pontos Doppler utilizados, conclui-se que o modelo GEM9 apresenta um resultado ligeiramente melhor do que os demais modelos. Entretanto, uma conclusão definitiva é prematura. É necessário melhorar a confiança nas alturas geoidais Doppler melhorando, entre outras coisas, os parâmetros de transformação do NWL-9D para o Sistema Geodésico Brasileiro.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Camil Gemael que vem acompanhando nossas pesquisas relativas à determinação das alturas geoidais no

Brasil e cujas valiosas sugestões muito benefício têm trazido ao nosso trabalho.

Ao Dr. Petr Vaníček que nos orientou em dois estágios realizados no Canadá, um através do acordo CNPq/NSERC e outro através do acordo CNPq/CIDA.

Ao Dr. Gerard Lachapelle que em recente visita realizada ao nosso Departamento através do acordo CNPq/NSERC contribuiu valiosamente com suas sugestões.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), que financiou parte do projeto através do auxílio 81/931-1.

Finalmente, somos profundamente gratos à Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, que através da Diretoria de Geodésia e Cartografia não tem poupado esforços no sentido de nos dar todo o apoio, colocando à nossa disposição todo o acervo de dados e informações, sem o que o nosso trabalho seria impossível.

REFERÊNCIAS

- BLITZKOW, D. & SÁ, N.C. de — 1982 — Determinação das alturas geoidais a partir de dados heterogêneos. Palestra proferida no Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Rio de Janeiro.
- FERRARI, D. — 1979 — A look at Brazilian Geodesy using satellite Doppler as a tool. 2nd International Symposium on Satellite Doppler Positioning, Austin, 23 pp.
- GEMAEL, C. — 1981 — Referenciais cartesianos utilizados em Geodésia. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba, 70 pp.
- HEISKANEN, W.A. & MORITZ, H. — 1979 — Physical Geodesy. Technical University, Graz (Reprint), 364 pp.
- LACHAPELLE, G. — 1979 — Comparison of Doppler-derived and gravimetric geoid undulations in North America. Collected Papers, Geodetic Survey, Canada, 77-95.
- LERCH, F.J., KLOSKO, S.M., LAUBSCHER, R.E. & WAGNER, C.A. — 1979 — Gravity Model Improvement using GEOS 3 (GEM9 and GEM10). J. Geophys. Res., 84(B): 3897-3916.
- LERCH, F.J., PUTNEY, B.H., WAGNER, C.A. & KLOSKO, S.M. — 1981 — Goddard Earth Models for Oceanographic Applications (GEM10B and 10C). Marine Geodesy 5: 145-187.
- PRADO, W.S. — 1981 — Determinação das ondulações do geóide através de harmônicos esféricos. INPE-2399-TDL/087, S.J. Campos, 56 pp.
- RUMEL, R. & RAPP, R.H. — 1976 — The influence of the atmosphere on geoid and potential coefficient determinations from gravity data. J. Geophys. Res., 81: 5639-5642.
- VANICEK, P. & KRAKIWSKY, E. — 1982 — Geodesy. The concepts. North Holland Co., Amsterdam, 691 pp.

Versão original recebida em Mai./83;
Versão final, em Ago./83.