doi: 10.22564/rbgf.v9i1.1093

# UMA ANÁLISE DA RESOLUÇÃO E ESTABILIDADE NA DETERMINAÇÃO DO "STRIKE" DE ESTRUTURAS UNIDIMENSIONAIS ANISOTRÓPICAS ATRAVÉS DO TENSOR DE IMPEDÂNCIA MAGNETOTELÚRICO

WALTER EUGÊNIO DE MEDEIROS[1] & LUIZ RIJO[2]

A obtenção das componentes principais do tensor de impedância magnetotelúrico, $\underline{\underline{Z}}^o$, é feita através de uma rotação do tensor $\underline{\underline{Z}}$, sendo este medido ou calculado num sistema de eixos ortogonais qualquer. No caso de estruturas bidimensionais isotrópicas, o ângulo de rotação $\theta_o$ de $\underline{\underline{Z}}$ a $\underline{\underline{Z}}^o$ é univocamente determinado. Neste trabalho analisamos a capacidade de discriminar "strikes", em estruturas unidimensionais anisotrópicas, através do estudo de $\theta_o$ como função de frequência, $\theta_o(\omega)$. Mostramos que $\theta_o(\omega)$ é insensível à presença de camadas isotrópicas e, no caso da transição entre camadas anisotrópicas, $\theta_o(\omega)$ acusa a presença da camada inferior aproximadamente nos mesmos valores de frequência que a fase $\phi(\omega)$ e a resistividade aparente $\rho_a(\omega)$, tendo, no entanto, $\theta_o(\omega)$ convergência mais rápida para o valor do ângulo de "strike" da camada inferior do que $\phi(\omega)$ para $45^o$ e $\rho_a(\omega)$ para os valores específicos de resistividade. Para simular dados reais, contaminamos $\underline{\underline{Z}}$ com ruído e verificamos que a determinação do "strike" é bastante estável, caso a diferença entre as impedâncias nos modos TE e TM seja superior ao nível de ruído.

RESOLUTION AND STABILITY IN THE STRIKE DETERMINATION OF UNIDIMENSIONAL ANISOTROPIC STRUCTURES THROUGH THE MAGNETOTELLURIC IMPEDANCE TENSOR – The principal components of the magnetotelluric impedance tensor $\underline{\underline{Z}}^o$ are determined by a rotation from the tensor $\underline{\underline{Z}}$ which is measured or calculated in any system of ortogonal axis. In the case of bidimensional isotropic media, the rotation angle $\theta_o$, from $\underline{\underline{Z}}$ to $\underline{\underline{Z}}^o$ is uniquely determined. In this work we analyse the capacity to discriminate strikes in unidimensional anisotropic media through the study of $\theta_o$ as frequency function, $\theta_o(\omega)$. We conclude that $\theta_o(\omega)$ is insensitive to the presence of isotropic layers and in the case of transitions between anisotropic layers $\theta_o(\omega)$ shows the presence of the underlying layer approximately at the same frequencies shown by the phase $\phi(\omega)$ and apparent resistivity $\rho_a(\omega)$. However $\theta_o(\omega)$ has faster convergence to the strike angle of the underlying layer, than $\phi(\omega)$ has to $45^o$ and $\rho_a(\omega)$ has to the specific resistivity values. To simulate experimental data we introduce noise in $\underline{\underline{Z}}$. When the difference between TE and TM mode impedances is greater than the noise level, the strike determination is very stable.

## 1. INTRODUÇÃO

O método magnetotelúrico (Tikhonov, 1950; Cagniard, 1953) propõe a existência de uma relação linear entre componentes dos campos elétrico ( $\underline{E}$) e magnético ( $\underline{H}$) naturais na superfície da Terra. No caso de estruturas horizontais isotrópicas, esta relação se resume, no domínio da frequência, à proporcionalidade (Cagniard, 1953):

$$E_x = ZH_y \tag{1}$$

onde Z é a impedância de superfície e x e y são duas direções ortogonais arbitrárias.

Na prática, a interpretação é feita através dos parâmetros resistividade aparente ($\rho_a$) e fase ($\phi$), definidos como:

1 Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, Universidade Federal do Pará, Campus do Guamá, 66050 Belém, PA. Em afastamento do Deptº de Física Teórica e Experimental, Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Campus Universitário, 59000 Natal, RN, Brasil.

2 Departamento de Geofísica, Centro de Geociências, Universidade Federal do Pará, FAX (091) 229.9677, Caixa Postal 1611, 66050 Belém, PA, Brasil.

$$\rho_a = \frac{|Z|^2}{\omega\mu_o} \tag{2}$$

$$\phi = \arctan\left[\left[\frac{I(Z)}{R(Z)}\right]\right] \tag{3}$$

sendo $\omega = 2\pi f$ a frequência angular, $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, a permeabilidade magnética do vácuo e $I(Z)$ e $R(Z)$, respectivamente, as partes imaginária e real de Z.

Uma generalização de (1), (Cantwell, 1960), para meios com anisotropia e/ou heterogeneidades laterais, é dada por:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} \tag{4}$$

ou $\underline{E} = \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{H}$ onde $\underline{\underline{Z}}$ é o tensor de impedância medido num sistema xy qualquer.

No caso bidimensional isotrópico, há o desacoplamento da onda eletromagnética nos modos transversal elétrico ao eixo z (TE), (i.e. $E_z = 0$, Harrington, 1961) e transversal magnético ao eixo z (TM), (i.e., $H_x = 0$), num sistema de eixos que tenha uma das direções coincidente com o ''strike'' da estrutura, i.e., que contenha os eixos principais do tensor de impedância. Nesse sistema, define-se um par de curvas equivalentes a (2) e (3) para cada modo.

A obtenção das componentes principais do tensor de impedância é feita através de um rotação de $\underline{\underline{Z}}$ a $\underline{\underline{Z}}^o$, dada por (Eggers, 1982):

$$\underline{\underline{Z}}^o = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{R}}^T \tag{5}$$

onde

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} \cos\theta_o & \sin\theta_o \\ -\sin\theta_o & \cos\theta_o \end{pmatrix} \tag{6}$$

sendo $\underline{\underline{R}}^T$ a transporta de $\underline{\underline{R}}$ e $\theta_o$ previamente determinado por:

$$\theta_o = \frac{1}{4} \times \arctan\left(\frac{2R(Z_3 Z_4{}^*)}{|Z_4|^2 - |Z_3|^2}\right) \tag{7}$$

onde

$$Z_3 = \frac{Z_{xy} + Z_{yx}}{2} \tag{8}$$

$$Z_4 = \frac{Z_{xx} - Z_{yy}}{2} \tag{9}$$

sendo $Z_4{}^*$ o complexo conjugado de $Z_4$.

Nosso objetivo é analisar a capacidade de discriminar estruturas ''multi-strikes'' formadas pela superposição de camadas homogêneas anisotrópicas, com diferentes eixos de anisotropia, através do uso da transformação (5) e das relações (7)-(9), bem como a estabilidade da determinação dos ''strikes'' em presença de ruído. Caso no modelo existam mais de dois ''strikes'', o tensor $\underline{\underline{Z}}^o$ não será anti-diagonal, mas a rotação terá a propriedade de maximizar $|Z_{xy}{}^o + Z_{yx}{}^o|$ e minimizar $|Z_{xx}{}^o - Z_{yy}{}^o|$ (Sims & Bostick, 1969). Trabalharemos sempre com dados sintéticos.

## 2. COMPORTAMENTO DE $\theta_o(\omega)$ NA AUSÊNCIA DE RUÍDO

Durante este trabalho vamos usar um modelo formado por N camadas anisotrópicas (Fig. 1), onde em cada camada são especificados $h_j$, a espessura; $\sigma_{x''j}$, $\sigma_{y''j}$ e $\sigma_{z''j}$, as condutividades ao longo dos eixos locais de anisotropia x''j y''j z''j, e $\alpha_j$ e $\theta_j$, a inclinação e o azimute do sistema x''j, y''j, z''j em relação ao sistema de medição xyz. Vamos assumir a aproximação quasi-estática, (i.e. $\sigma_j \gg \omega\epsilon_o$, onde $\epsilon_o = (1/36\pi) \times 10^{-9}$ F/m é a permissividade elétrica do vácuo), e que todas as camadas têm permeabilidade $\mu_o$.

O cálculo dos campos eletromagnéticos para este modelo, em presença de uma onda plana, foi feito por Reddy & Rankin (1971). Assim, dado $\omega$ poderemos obter $\underline{\underline{Z}}(\omega)$ na superfície. Observe-se que uma camada isotrópica pode ser incorporada neste modelo, bastando fazer-se $\sigma_{x''j} = \sigma_{y''j} = \sigma_{z''j}$, e dando valores quaisquer para $\alpha_j$ e $\theta_j$, não tendo estes últimos nenhuma influência no valor de $\underline{\underline{Z}}(\omega)$ obtido, se os cálculos fossem feitos com precisão infinita. Por razões dadas no Apêndice 1 faremos $\alpha_j = \theta_j = 0$, no caso da j-ésima camada ser isotrópica.

Vamos considerar, inicialmente, um meio com apenas duas camadas, a primeira isotrópica e a segundo tendo $\alpha_2 = 0$. Tomemos momentaneamente $\theta_2 = 0$. Nessa situação,

$$\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}}'' = \begin{pmatrix} 0 & Z_{x''y''} \\ Z_{y''x''} & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

sendo $\underline{\underline{Z}}''$ o tensor medido no sistema de eixos locais da segunda camada.

No entanto, quando $\theta_2 \neq 0$, o cálculo já é feito incorporando uma rotação incógnita $\theta_i$. Isto é,

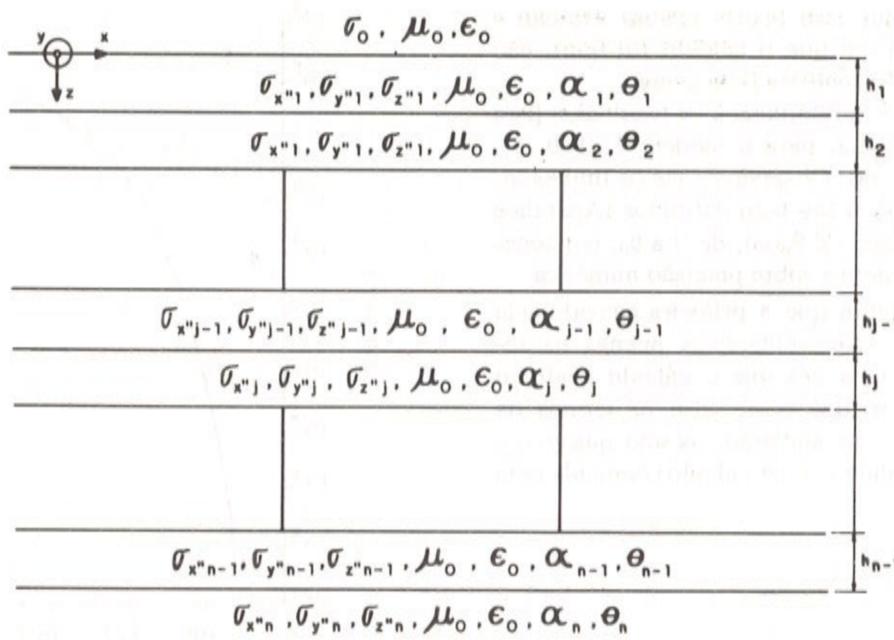



**Figura 1.** Modelo de camadas horizontais homogêneas anisotrópicas. $h_j$ é a espessura da camada j; $\sigma_{x''j}$, $\sigma_{y''j}$ e $\sigma_{z''j}$ são as condutividades ao longo dos eixos locais de anisotropia $x''_j$, $y''_j$, $z''_j$, respectivamente e $\alpha_i$ e $\theta_i$, são a inclinação e o azimute do sistema $x''_j$, $y''_j$, $z''_j$ em relação ao sistema de medição xyz.

**Figure 1.** The horizontal anisotropic homogeneous layered model, $h_j$ is the thickness of layer j; $\sigma_{x''j}$, $\sigma_{y''j}$ and $\sigma_{z''j}$ are the conductivities along the locally the locally anisotropic axes $x''_j$, $y''_j$, $z''_j$, respectively; $\alpha_i$ and $\theta_i$ are the inclination and strike angles of $x''_j$, $y''_y$, $z''_j$ with respect to the measuring system of coordinates xyz.

$$\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{Z}}'' \cdot \underline{\underline{R}}^T \qquad (11)$$

onde $\underline{\underline{R}}$ é a matriz (6) com $\theta_i$ em lugar de $\theta_o$.

Seja

$$Z_{y''x''}(\omega) = - Z_{x''y''}(\omega) + \epsilon(\omega) \qquad (12)$$

onde $\epsilon(\omega)$ é a perturbação originada pela anisotropia na segunda camada. Como se mostra no Apêndice 2,

$$\epsilon(\omega) = Z_1 \frac{(\gamma - \beta)\,(1 - t^2)}{(1 + \gamma t)\,(1 + \beta t)} \qquad (13)$$

onde $Z_1 = \sqrt{(i\omega\mu_o)/\sigma_1}$ é a impedância intrínseca da camada 1, $\gamma = \sqrt{\sigma_1/\sigma_{x''2}}$, $\beta = \sqrt{\sigma_1/\sigma_{y''2}}$, e $t = \tanh(u_1 h_1)$, sendo $u_1 = \sqrt{i\omega\mu\sigma_1}$ a constante de propagação na camada 1.

Usando (10) e (12) em (11) obtém-se

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{pmatrix} \epsilon\cos\theta_i\sin\theta_i & Z_{x''y''} - \epsilon(\sin\theta_i)^2 \\ -Z_{x''y''} + \epsilon(\cos\theta_i)^2 & -\epsilon\cos\theta_i\sin\theta_i \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Sendo (14) o tensor inicialmente calculado, e usando (7), a direção $\theta_o$ será dada por

$$\tan(4\theta_o) = - \frac{0{,}25|\epsilon|^2 \sin(4\theta_i)}{0{,}25|\epsilon|^2 \cos(4\theta_i)} \qquad (15)$$

Esta relação fornece $\tan(4\theta_o) = -\tan(4\theta_i)$, independentemente do valor $|\epsilon|^2$, que é sempre diferente de zero. Observando que o ângulo incógnito $\theta_i$ é simplesmente $-\theta_2$, ficamos com

$$\tan(4\theta_o) - \tan(4\theta_2) = 0 \qquad (16)$$

O valor para $\theta_o$ dado por (16) será aquele que tiver menor módulo na sequência $\theta_2 - \pi/2$, $\theta_2 - \pi/4$, $\theta_2$, $\theta_2 + \pi/4$, $\theta_2 + \pi/2$.

Podemos interpretar este resultado da seguinte maneira: como $\epsilon(\omega)$ só é sensível à anisotropia do modelo, existente apenas na última camada, a primeira camada é "transparente" para $\theta_o(\omega)$, não importa o valor de $\omega$. Observemos, no entanto, que nos cálculos computacionais é usada a expressão geral (7), que contém erros de arredondamento. Em vários cálculos realizados verificamos que quando $\epsilon(\omega)$ é muito pequeno, (i.e. $\omega \to \infty$), a razão na eq. (7) oscila em torno de zero, ao invés de fornecer $\tan(4\theta_2)$ como deduzimos analiticamente. Assim, quando $\omega \to \infty$ obtém-se numericamente $\theta_o(\omega) \approx 0$. Ressaltemos que os valores específicos de $\omega$ em que isso ocorre apenas avaliam a precisão da máquina em que o cálculo foi feito, não invalidando a dedução analítica feita acima.

Nas Figs. 2 e 3 apresentamos os resultados para $\theta_o(\omega)$, $\phi(\omega)$, $\rho_a(\omega)$ e $\epsilon(\omega)$ para o modelo 1 (Tab. 1), sem a presença de ruído. Observe-se que os limites inferior e superior de $\epsilon(\omega)$ são bem definidos (Apêndice 2), e a brusca transição de $\theta_o(\omega)$, de 0 a $\theta_o$, em conexão com a discussão acima sobre precisão numérica.

Vamos supor agora que a primeira camada seja também anisotrópica. Apresentaremos apenas os resultados numéricos, uma vez que o cálculo analítico é inviável. Observe-se que neste caso os termos da diagonal principal não se anularão, mesmo que o sistema de eixos de medida (ou de cálculo) coincida com

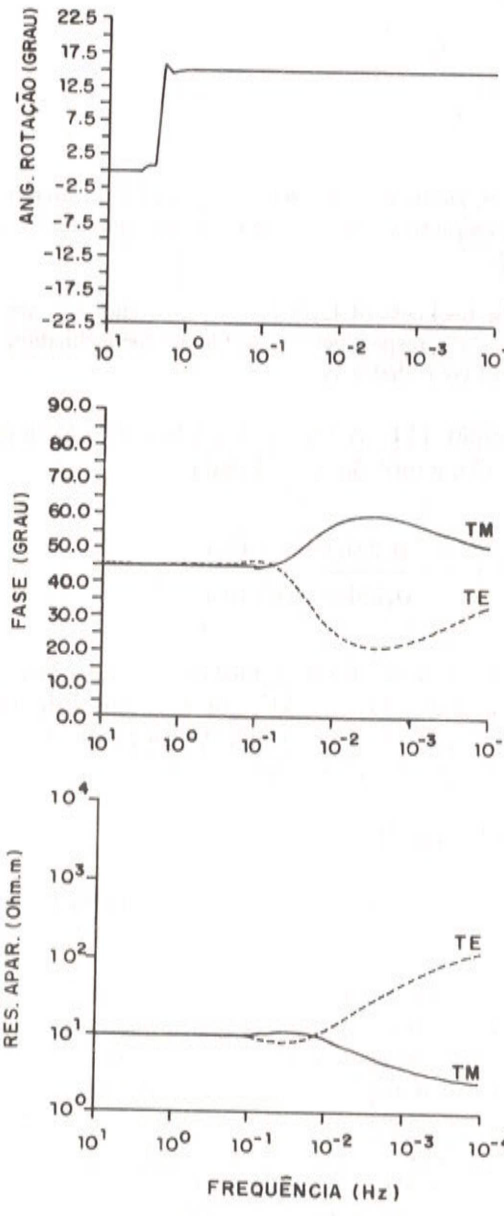



**Figura 2.** Curvas de ângulo de rotação, fase e resistividade aparente para o modelo 1 da Tab. 1.

**Figure 2.** Rotation angle, phase and apparent resistivity curves of model 1 derived from Table 1.

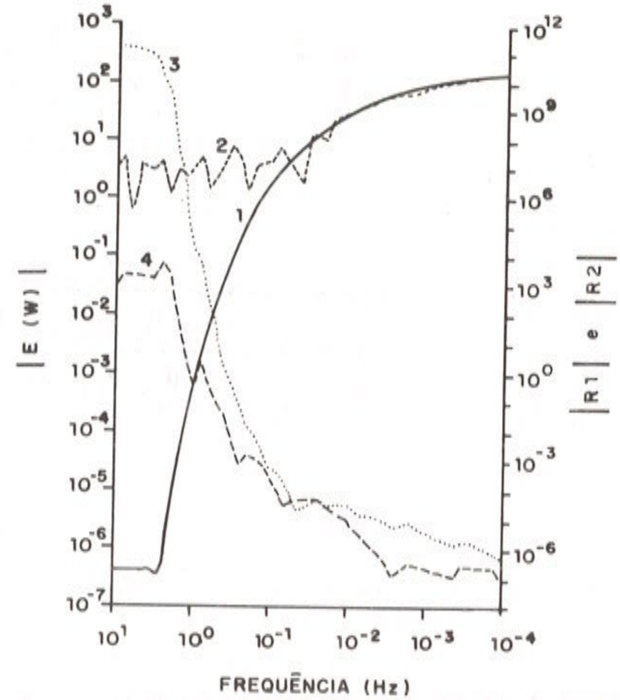



**Figura 3.** Curvas de $\epsilon(\omega)$, $R_1$ e $R_2$ definidos em (12), (26) e (27), respectivamente. 1- $|\epsilon(\omega)|$ sem ruído em $\underline{\underline{Z}}$, 2- $|\epsilon(\omega)|$, 3- $|R_2|$ e 4- $|R_1|$, ruído com $d_p = 5\%$ em cada componente de $\underline{\underline{Z}}$.

**Figure 3.** $\epsilon(\omega)$, $R_1$ and $R_2$ curves, as defined by equations (12), (26) and (27), respectively. Curve 1 shows $|\epsilon(\omega)|$ without noise in $\underline{\underline{Z}}$; curves 2, 3 and 4 shows $|\epsilon(\omega)|$, $|R_1|$, respectively, where a Gaussian noise of mean equal zero and standart deviation $d_p = 5\%$ has been added to each tensor impedances.

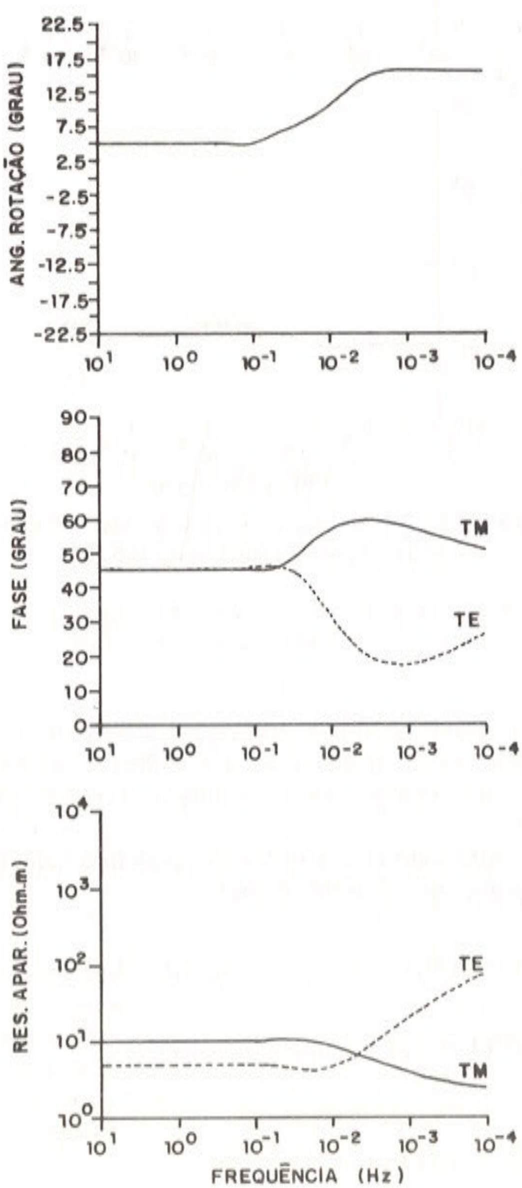
um dos eixos locais de anisotropia das duas camadas. Isto significa que $\epsilon(\omega)$ não é mais originado apenas na camada 2, independentemente da freqüência, como no caso anterior. Ao invés, $\epsilon(\omega)$ reflete ora maior influência da camada 1, quando $\omega \rightarrow \infty$; ora maior influência da camada 2, quando $\omega \rightarrow 0$.

Na Fig. 4 apresentamos um exemplo (modelo 2 da Tab. 1). Este modelo ilustra bem que $\underline{\underline{Z}}$ é sensível a um dado "strike" a depender do valor de freqüência, um resultado já apontado por Mann (1965). Observe-se que a camada 1 não é mais "transparente" em relação a $\theta_o(\omega)$. A presença da camada 2 é detectada em $\theta_o(\omega)$, $\phi(\omega)$, e $\rho_a(\omega)$ aproximadamente nos mesmos valores de freqüência. No entanto, a estabilização de $\theta_o(\omega)$ no valor constante $\theta_2$ se dá em freqüências maiores que a de $\phi(\omega)$ em $45^o$, ou de $\rho_a(\omega)$ nos valores específicos de resistividade. Heuristicamente isto significa que o meio de duas camadas já se comporta como um semi-espaço com as propriedades da camada 2 em relação a $\theta_o(\omega)$, enquanto que em relação a $\phi(\omega)$ e $\rho_a(\omega)$ isto ainda não ocorre. Neste sentido, podemos dizer que $\theta_o(\omega)$ apresenta uma convergência mais rápida para os parâmetros da segunda camada do que $\phi(\omega)$ e $\rho_a(\omega)$.

**Tabela 1.** Parâmetros físico-geométricos dos modelos.

**Table 1.** Physical and geometrical parameters of models.

| Modelo | Camada | $\rho_x''$ ($\Omega$.m) | $\rho_y''$ ($\Omega$.m) | $\rho_z''$ ($\Omega$.m) | $\alpha$ (grau) | $\theta$ (grau) | h (km) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 10 | 10 | 10 | 0 | 0 | 10 |
| | 2 | 2 | 200 | 2 | 0 | 15 | - |
| 2 | 1 | 10 | 5 | 10 | 0 | 5 | 10 |
| | 2 | 2 | 200 | 2 | 0 | 15 | - |
| 3 | 1 | 10 | 10 | 10 | 0 | 0 | 7 |
| | 2 | 2 | 200 | 2 | 0 | 15 | 5 |
| | 3 | 10 | 1 | 10 | 0 | 5 | - |
| 4 | 1 | 10 | 100 | 10 | 0 | 15 | 3 |
| | 2 | 50 | 50 | 50 | 0 | 0 | 7 |
| | 3 | 10 | 2 | 10 | 0 | 5 | - |




Na Fig. 5 apresentamos os resultados para o modelo 3 da Tab. 1. Valem aqui os mesmos comentários feitos anteriormente nas transições de $\theta_o(\omega)$ de uma camada isotrópica a outra anisotrópica, e entre camadas anisotrópicas. Observe-se que a depender da relação $(h_1/h_2)$, $\theta_o(\omega)$ pode não chegar a estabilizar no valor $\theta_2$, no caso da primeira camada ser também anisotrópica. Um modelo de três camadas também interessante é quando a camada intermediária é isotrópica. Neste caso, $\theta_o(\omega)$ é insensível à sua presença, conforme Fig. 6, onde estão apresentados os resultados para o modelo 4 da Tab. 1.

## 3. COMPORTAMENTO DE $\theta_o(\omega)$ EM PRESENÇA DE RUÍDO

Vamos estender o estudo analítico de $\theta_o(\omega)$ do modelo de duas camadas, com a primeira isotrópica, de modo a simular dados reais. Para tanto, vamos contaminar $\underline{\underline{Z}}$ com ruídos aleatórios. Lembremos que erros introduzidos na impedância são amplificados no cálculo de $\rho_a$ e $\phi$, assim um ruído de até $\pm 0{,}1$ em $\underline{\underline{Z}}$ pode acarretar desvios de até $\pm 0{,}2$ em $\rho_a$ e $\phi$.

O tensor contaminado com ruídos $\hat{\underline{\underline{Z}}}$ é obtido de $\underline{\underline{Z}}$, fazendo-se:

$$\hat{Z}_{xx} = R(Z_{xx})\,(1 + r_1) + iI\,(Z_{xx})\,(1 + r_2) \qquad (17)$$

$$\hat{Z}_{xy} = R(Z_{xy})\,(1 + r_3) + iI\,(Z_{xy})\,(1 + r_4) \qquad (18)$$

**Figura 4.** Curvas de ângulo de rotação, fase e resistividade aparente para o modelo 2 da Tab. 1.

**Figure 4.** Rotation angle, phase and apparent resistivity curves of model 2 derived from Table 1.

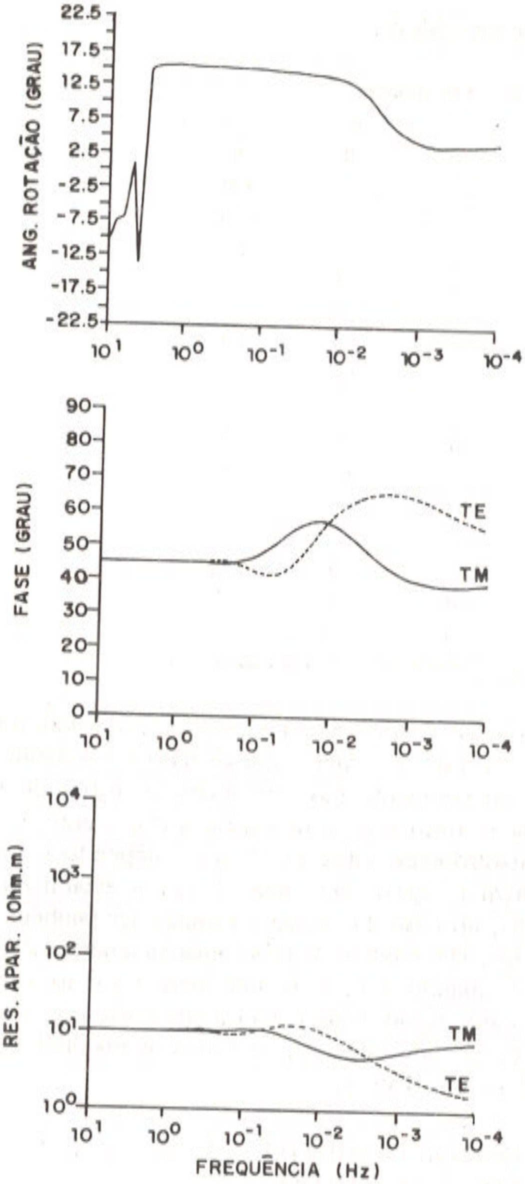



**Figura 5.** Curvas de ângulo de rotação, fase e resistividade aparente para o modelo 3 da Tab. 1.

**Figure 5.** Rotation angle, phase and apparent resistivity curves of model 3 derived from Table 1.

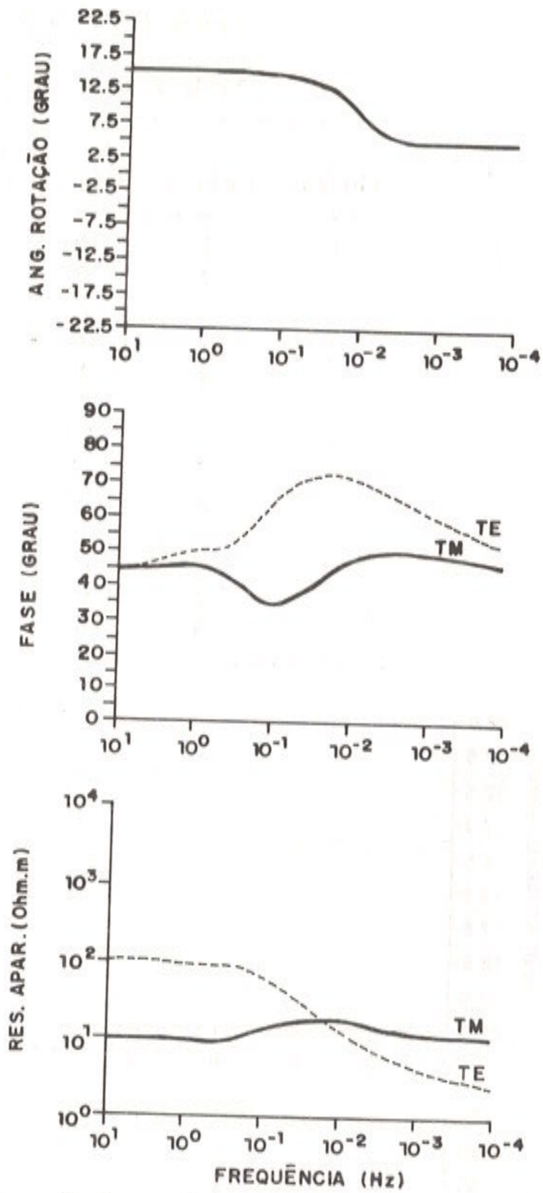



**Figura 6.** Curvas de ângulo de rotação, fase e resistividade aparente para o modelo 4 da Tab. 1.

**Figure 6.** Rotation angle, phase and apparent resistivity curves of model 4 derived from Table 1.

$$\hat{Z}_{yx} = R(Z_{yx})\ (1 + r_5) + iI\ (Z_{yx})\ (1 + r_6) \qquad (19)$$

$$\hat{Z}_{yy} = R(Z_{yy})\ (1 + r_7) + iI\ (Z_{yy})\ (1 + r_8) \qquad (20)$$

Para obter os $r_j$ usamos uma subrotina que gera números aleatórios com distribuição normal de média zero e desvio padrão $d_p$ (Forsythe et al., 1977). Esta hipótese sobre distribuição dos ruídos é comumente usada no método magnetotelúrico (Gamble et al., 1979).

Utilizando (12) e (17)-(20), podemos calcular $\hat{Z}_3$ e $\hat{Z}_4$ pelas eqs. (8) e (9) obtendo

$$\hat{Z}_3 = \frac{1}{2}\{R(Z_{x''y''})\ (r_3 - r_5) + R(\epsilon)\ [(\cos\theta_i)^2\ (1 + r_5) - (\sin\theta_i)^2\ (1 + r_3)] +$$

$$iI(Z_{x''y''})\ (r_4 - r_6) + iI(\epsilon)\ [(\cos\theta_i)^2\ (1 + r_6) - (\sin\theta_i)^2\ (1 + r_4)]\} \qquad (21)$$

$$\hat{Z}_4 = \frac{1}{2}(\sin\theta_i)^2\ \{R(\epsilon)\ (1 + \frac{r_1 + r_7}{2}) + iI(\epsilon)\ (1 + \frac{r_2 + r_8}{2})\} \qquad (22)$$

Para obtermos uma expressão que, mesmo aproximada, nos permita entender como o ruído afeta a determinação de $\theta_o(\omega)$, vamos majorar sua influência substituindo na expressão acima $r_1$, $r_3$, $r_6$ e $r_7$ por r e $r_2$, $r_4$, $r_5$ e $r_8$ por -r, onde r é o maior valor absoluto na seqüência $r_{i,j} = 1,8$, cada seqüência correspondendo a uma freqüência. Dessa forma:

$$\hat{Z}_3 = \frac{1}{2}\,(2rZ^*_{x''y''} + \epsilon\cos(2\theta_i) - r\epsilon^*) \tag{23}$$

$$\hat{Z}_4 = \frac{1}{2}\sin(2\theta_i)\,(\epsilon + r\epsilon^*) \tag{24}$$

Usando (7) obtemos

$$\tan(4\theta_o) = \frac{-\tan(4\theta_i) - R_1}{1 - R_2} \tag{25}$$

onde

$$R_1 = \frac{2ra}{|\epsilon|^2\cos(4\theta_i)} \tag{26}$$

$$R_2 = \frac{2rb}{|\epsilon|^2\cos(4\theta_i)} \tag{27}$$

$$a = \{[R(\epsilon)^2 - I(\epsilon)^2]\,.\,\sin(2\theta_i)\,.\,[\cos(2\theta_i) - 1] + 2\,[R(Z_{x''y''})R(\epsilon) - I(Z_{x''y''})\,I(\epsilon)]\,.\,\sin(2\theta_i) + r[R(Z_{x''y''})R(\epsilon) + I(Z_{x''y''})I(\epsilon) - \frac{|\epsilon|^2}{2}]\,\} \tag{28}$$

$$b = \{[R(\epsilon)^2 - I(\epsilon)^2]\,.\,[(\sin(2\theta_i))^2 - \cos(2\theta_i)] - 2[R(Z_{x''y''})R(\epsilon) - I(Z_{x''y''})I(\epsilon)]\,.\,\cos(2\theta_i) - 2r[R(Z_{x''y''})R(\epsilon) + I(Z_{x''y''})I(\epsilon) - |Z_{x''y''}|^2]\} \tag{29}$$

Podemos assim ter uma boa idéia do efeito do ruído na expressão (25) examinando a grandeza

$$R = \text{máximo}\ \{|R_1|\ ,\ |R_2|\} \tag{30}$$

pois o resultado para $\theta_o$ dado por (25) estará próximo ou distante daquele dado por (16) se $R \ll 1$ ou $R \approx 1$, respectivamente. Reforcemos que este parâmetro é válido apenas para o modelo específico de duas camadas com a primeira isotrópica, como assumimos no início da dedução.

Na Fig. 7 apresentamos os resultados para $\theta_o(\omega)$, $\phi(\omega)$ e $\rho_a(\omega)$, do modelo 1, com $d_p = 0,05$. Observe-se que o ruído faz com que $\theta_o(\omega)$ indique o valor $\theta_2$ apenas após a freqüência em que seguramente $\epsilon(\omega)$ convergiu para o valor calculado sem ruído (Fig. 3), ou equivalentemente, em que $R \ll 1$ (Fig. 3). Assim, quando a diferença entre as impedâncias calculadas nos modos TE e TM é superior ao nível de ruído, as oscilações de $\theta_o(\omega)$ em torno de $\theta_2$ são pequenas, da ordem do erro introduzido, mostrando que $\theta_o(\omega)$ é bastante estável.

Na Fig. 8 apresentamos os resultados para o modelo 2 e na Fig. 9, para o modelo 3, ambos os casos com $d_p = 0,05$. Comparados aos casos sem ruído, não há perda de sensibilidade em $\theta_o(\omega)$ nas transições entre camadas anisotrópicas.

## 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora já tenha sido apontado pioneiramente por Bostick & Smith (1962) que $\theta_o(\omega)$ dá uma estimativa bastante consistente da direção dominante de anisotropia (ou descontinuidade lateral), uma análise da convergência e estabilidade $\theta_o(\omega)$, para o caso unidimensional anisotrópico, ainda não havia sido feita, ao menos de nosso conhecimento. Dos resultados que ora apresentamos, vemos que a rápida convergência de $\theta_o(\omega)$, de uma direção de "strike" à outra, permite uma boa descriminação do número e valores das direções principais, mesmo em presença de ruído. Estes resultados, acoplados à observação de $\phi(\omega)$ e $\rho_a(\omega)$, podem ser de grande valia na atribuição de um modelo inicial

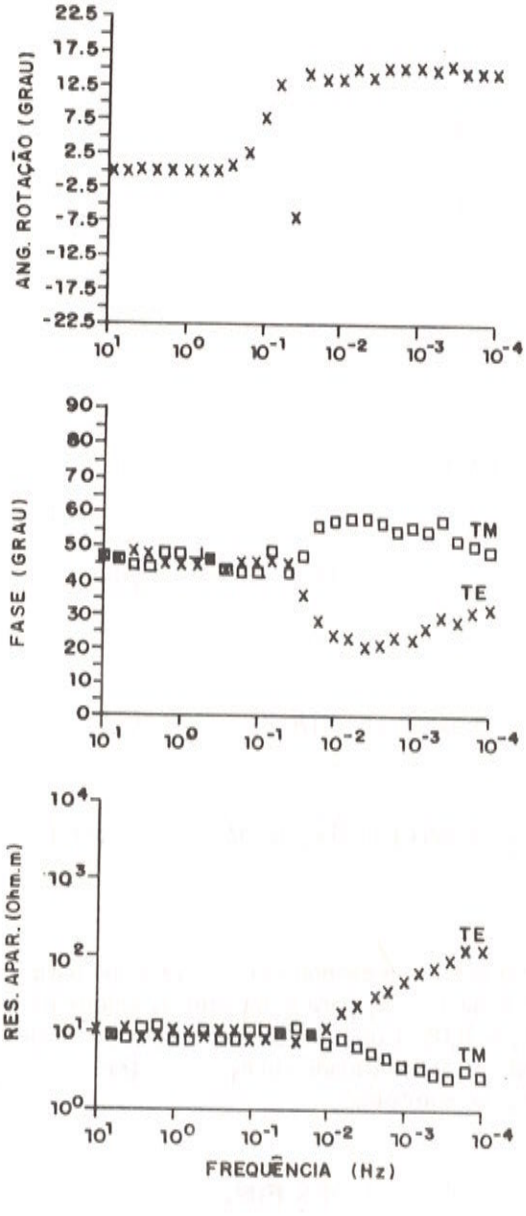



**Figura 7.** Curvas de ângulo de rotação, fase e resistividade aparente para o modelo 1 da Tab. 1, ruído com $d_p$ = 5% em cada componente de $\underline{\underline{Z}}$.

**Figure 7.** Rotation angle, phase and apparent resistivity curves of model 1 derived from Table 1, where a Gaussian noise of mean equal zero and standart deviation $d_p$ = 5% has been added to each tensor impedances.

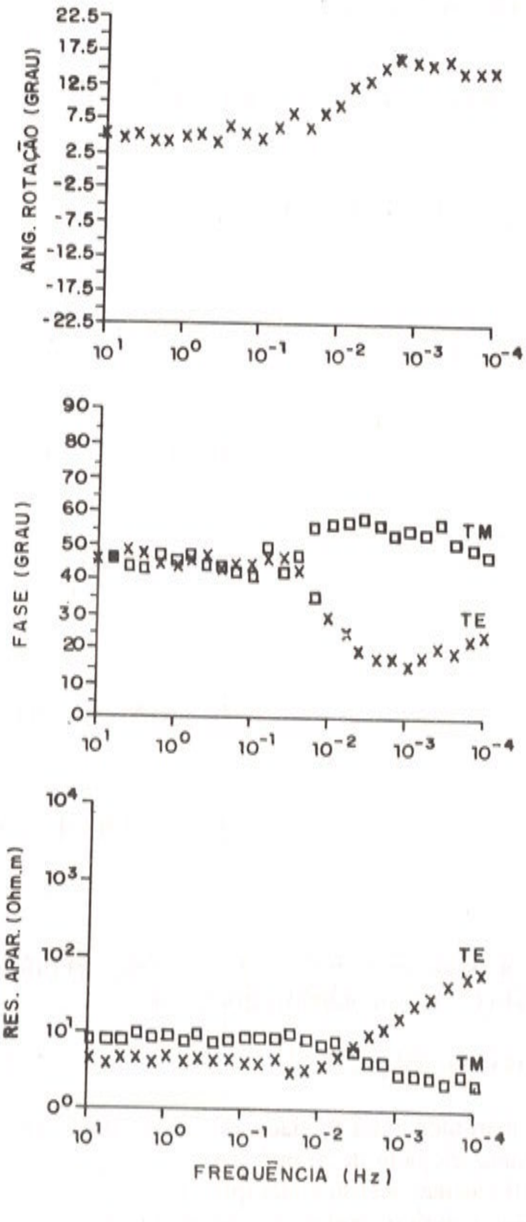



**Figura 8.** Curvas de ângulo de rotação, fase e resistividade aparente para o modelo 2 da Tab. 1, ruído com $d_p$ = 5% em cada componente de $\underline{\underline{Z}}$

**Figure 8.** Rotation angle, phase and apparent resistivity curves of model 2 derived from Table 1, where a Gaussian noise of mean equal zero and standart deviation $d_p$ = 5% has been added to each tensor impedances.

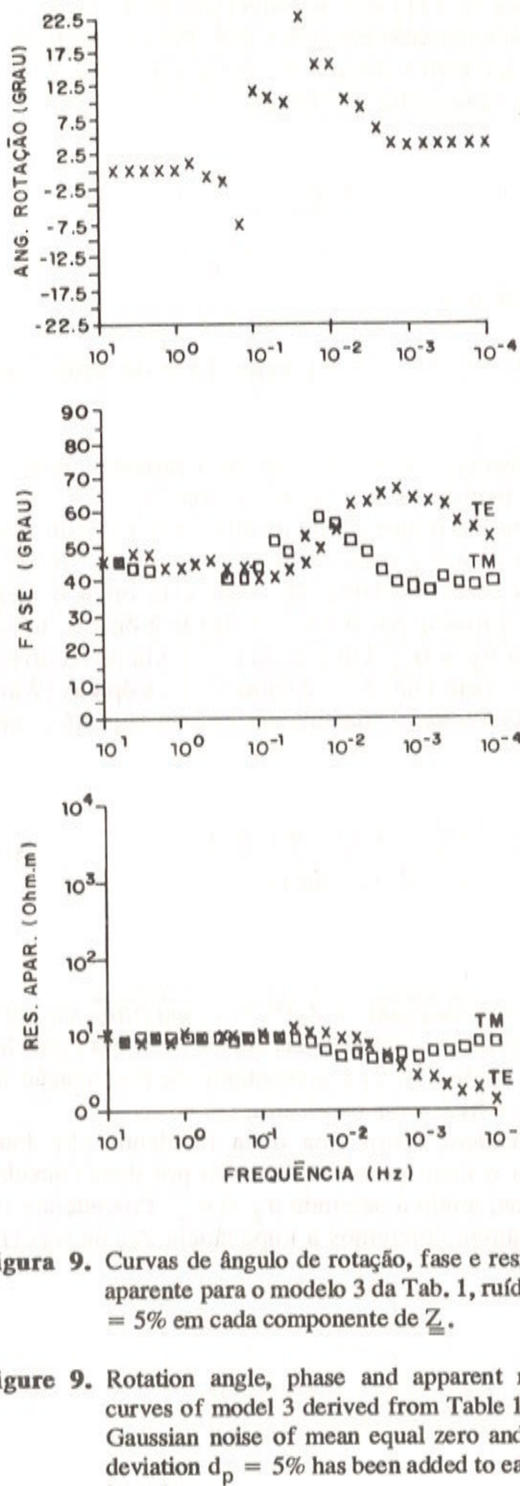



**Figura 9.** Curvas de ângulo de rotação, fase e resistividade aparente para o modelo 3 da Tab. 1, ruído com $d_p = 5\%$ em cada componente de $\underline{\underline{Z}}$.

**Figure 9.** Rotation angle, phase and apparent resistivity curves of model 3 derived from Table 1, where a Gaussian noise of mean equal zero and standart deviation $d_p = 5\%$ has been added to each tensor impedances.

num processo de interpretação, fixando, por exemplo, o número mínimo de camadas numa inversão automática onde tenha validade o modelo unidimensional anisotrópico.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao CNPq, FINEP e PETROBRÁS pelo apoio financeiro a esta pesquisa; aos colegas Abel Carrasquilla e Licurgo Peixoto e ao Prof. Douglas O'Brien, as leituras críticas do texto; ao Sr. André Oliveira o auxílio com a datilografia do texto; ao Sr. Ronaldo Vieira a complementação do desenho das figuras e aos revisores anônimos as sugestões e correções que muito contribuiram para melhorar este artigo.

## REFERÊNCIAS

BOSTICK, F.X., Jr. & SMITH, H.W. – 1962 – Investigation of large scale inhomogeneities in the earth by the magnetotelluric method. Proc. I.R.E., **50**: 2339-2346.

CAGNIARD, L. – 1953 – Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting. Geophysics, **18**: 605-635.

CANTWELL, T. – 1960 – Detection and analysis of low-frequency magnetotelluric signals. Ph.D. thesis, M.I.T.

EGGERS, D.W. – 1982 – An eigenstate formulation of the magnetotelluric impedance tensor. Geophysics, **47**: 1204-1214.

FORSYTHE, G.E., MALCOLM, M.A. & MOLER, C.B. – 1977 – Computer methods for mathematical computations. Prentice Hall Inc., Eaglewood Cliffs, N.J.

GAMBLE, T.D., GOUBAU, W.M. & CLARKE, J. – 1979 – Error analysis in remote reference magnetotellurics. Geophysics, **44**: 959-968.

HARRINGTON, R.F. – 1961 – Time-Harmonic Electromagnetic Field. McGraw Hill Book Inc., N.Y., 480 p.

MANN, J.E., Jr. – 1965 – The importance of anisotropic conductivity in magnetotelluric interpretation. J. Geophys. Res., **70**: 2940-2942.

REDDY, I.K. & RANKIN, D. – 1971 – Magnetotelluric effect of dipping anisotropies. Geophys. Prosp., **19**: 84-97.

SIMS, W.E. & BOSTICK, F.X., Jr. – 1969 – Methods of magnetotelluric analysis. University of Texas Technical Report 58, Austin, Texas, 58 p.

TIKHONOV, A.N. – 1950 – On determining electrical characteristics of the deep layers of the earth's crust. Geophysical Ser. Reprint, **5**: 2-3, ed. by K. Vozoff, SEG, 1985.

WAIT, J.R. – 1982 – Geo-electromagnetism. Academic Press, N.Y., 268 p.

Versão recebida em: 28/11/89
Versão revista e aceita em: 08/08/90
Editor Associado: M.S.M. Mantovani

## APÊNDICE 1

**Justificativa do uso de $\alpha = \theta = 0$ em camadas isotrópicas**

Considere um meio semi-infinito homogêneo anisotrópico com uma onda plana incidindo verticalmente sobre o mesmo. A solução para $\underline{\underline{Z}}(\omega)$ medido na superfície pode ser obtida particularizando N = 1 no modelo de Reddy & Rankin (1971), fornecendo:

$$\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{Z}}' \cdot \underline{\underline{R}}^T \tag{31}$$

onde

$$\underline{\underline{Z}}' = \begin{pmatrix} 0 & -[v(\cos\alpha)^2/\hat{y}_{x''} \;\; v(\sin\alpha)^2/\hat{y}_{z''}] \\ \hat{z}/ik_x & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

é o tensor medido no sistema auxiliar x'y'z' (Reddy & Rankin, 1971), $\underline{\underline{R}}$ é a matriz (6) e

$$v^2 = -\frac{(k_{x''})^2}{1 + (\sin\alpha)^2 \cdot (\gamma^2 - 1)} \tag{33}$$

$$\gamma^2 = \frac{\hat{y}_{x''}}{\hat{y}_{z''}} \tag{34}$$

$$(k_{x''})^2 = -\hat{z}\hat{y}_{x''} \tag{35}$$

$$\hat{z} = i\omega\mu_o \tag{36}$$

$$\hat{y}_{x''} = i\omega\epsilon_o + \sigma_{x''} \cong \sigma_{x''} \tag{37}$$

$$\hat{y}_{z''} = i\omega\epsilon_o + \sigma_{z''} \cong \sigma_{z''} \tag{38}$$

Vamos tomar $\sigma_{x''} = \sigma_{y''} = \sigma_{z''} = \sigma$ e deixar $\alpha$ e $\theta$ arbitrários. Usando (33) a (38) vamos obter (32) como

$$\underline{\underline{Z}}' = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{i\mu\theta_o/\sigma} \\ -\sqrt{i\omega\mu_o/\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ -Z & 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Substituindo (39) em (31) obtém-se $\underline{\underline{Z}}^o = \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}}'$, pois o sistema x'y'z' já é aquele que antidiagonaliza o tensor de impedância medido. Assim, de (7), $\theta_o(\omega) = 0$ independentemente dos valores atribuídos para $\alpha$ e $\theta$.

Observe-se, no entanto, que se uma pequena diferença, devido a aritmética finita dos cálculos numéricos, resultar na eq. (39) entre $Z'_{xy}$ e $-Z'_{yx}$, então o meio parecerá anisotrópico. Dessa forma o ângulo $\theta$ em $\underline{\underline{R}}$ na eq. (31) será acessível por meio de (7), i.e., $\theta_o(\omega)$ será calculado como sendo $\theta$. Para evitar a introdução desse erro sistemático, faremos $\alpha = \theta = 0$ sempre que a camada for isotrópica.

## APÊNDICE 2

**Dedução de $\epsilon(\omega)$ na equação 13 e de seus limites**

Considere um modelo de duas camadas, sendo a primeira isotrópica e a segunda com $\alpha_2 = \theta_2 = 0$. Nesta situação o sistema de medição xyz coincide com o sistema de eixos na segunda camada x''y''z''. Considere uma onda incidente TE. Para esta onda o meio parecerá formado por duas camadas isotrópicas, tendo a segunda $\sigma_2 = \sigma_{y2}$. Utilizando a fórmula de recorrência de um meio com N = 2 camadas isotrópicas (Wait, 1982), obteremos a impedância $Z_{yz}$ na superfície como:

$$Z_{yx} = -Z_1 \frac{Z_2^{TE} + Z_1 \tanh(u_1h_1)}{Z_1 + Z_2^{TE}\tanh(u_1h_1)} \tag{40}$$

onde $Z_1 = \sqrt{(i\omega\mu_o)/\sigma_1}$ e $Z_2^{TE} = \sqrt{(i\omega\mu_o)/\sigma_{y2}}$ são, respectivamente, as impedâncias intrínsecas nas camadas 1 e 2 do modo TE, $u_1$ é a constante de propagação na camada 1 e $h_1$ é a sua espessura.

Considere agora uma onda incidente TM. Para esta onda o meio parecerá formado por duas camadas isotrópicas, tendo a segunda $\sigma_2 = \sigma_{x2}$. Procedendo de forma análoga obteremos a impedância $Z_{xy}$ na superfície como:

$$Z_{xy} = Z_1 \frac{Z_2^{TM} + Z_1 \tanh(u_1h_1)}{Z_1 + Z_2^{TM}\tanh(u_1h_1)} \tag{41}$$

onde $Z_2^{TM} = \sqrt{(i\omega\mu_o)/\sigma_{x2}}$ é a impedância intrínseca na camada 1 do modo TM e $Z_1$ é dado pela mesma expressão acima. Dessa forma $\epsilon(\omega)$, (eq. (13)), pode ser deduzido, bastando substituir-se (40) e (41) em (12).

A depender da relação $(h_1/\delta_1)$, $\delta_1 = \sqrt{2/(\omega\mu_o\sigma_1)}$ é o "skin-depth" da camada 1, podemos estabelecer os seguintes limites para $\epsilon(\omega)$:

- $\epsilon(\omega) \to 0$, quando $(h_1/\delta_1) \gg 1$

- $\epsilon(\omega) \rightarrow Z_2^{TM} - Z_2^{TE}$, quando $(h_1/\delta_1) \ll 1$

sendo $Z_2^{TM} = \gamma Z_1$, $Z_2^{TE} = \beta Z_1$, $\gamma = \sqrt{\sigma_1/\sigma_{x''2}}$ e $\beta = \sqrt{\sigma_1/\sigma_{y''2}}$.

Para obter estes limites observe que

- $t = \tanh(u_1 h_1) = \tanh(u_1 h_1 \delta_1/\delta_1) = \tanh(h_1\sqrt{2i}/\delta_1)$

aplique a propriedade de que

- $\lim_{x\rightarrow a}[f(x)/g(x)] = [\lim_{x\rightarrow a} f(x)]/[\lim_{x\rightarrow a} g(x)]$

desde que $\lim_{x\rightarrow a} g(x) \neq 0$ e use o fato de que

- $\lim_{h_1/\delta_1\rightarrow\infty} t = 0$

- $\lim_{h_1/\delta_1\rightarrow o} t = 1$