

SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DE BIOT PARA MEIOS ACÚSTICOS POROSOS USANDO DIFERENÇAS FINITAS COM OPERADORES DE QUARTA ORDEM

Vicente Pinheiro Neto & Marco Antônio Barsottelli Botelho

Nós apresentamos uma modelagem para simular a propagação de ondas de baixa frequência em meios acústicos porosos e saturados, usando o método de diferenças finitas para resolver o sistema de equações de Biot. O esquema de diferenças finitas empregado é explícito e usa operadores com aproximação de quarta ordem no espaço e aproximação de segunda ordem no tempo, com malhas retangulares. Os resultados são obtidos sobre dois modelos distintos. O primeiro modelo é usado para propagar a equação em um meio complexo, como os que simulam um reservatório de hidrocarbonetos. O segundo modelo não apresenta heterogeneidades e é usado para propagar o sistema de Biot e verificar a presença da Onda P_2 -lenta (de acordo com a teoria de Biot) na resposta sísmica do meio. A energia sísmica é compartilhada entre as duas fases e é possível observar que a amplitude do deslocamento no fluido converge para a amplitude de deslocamento na fase sólida durante a propagação. É mostrado para o segundo modelo que é possível observar o segundo evento, a onda P_2 -lenta. O sistema de Biot, tratado por diferenças finitas, mostra a propagação das ondas com o mesmo tempo de trânsito, tanto para ondas P-rápidas, ou P_1 , quanto para P-lentas, ou P_2 , que os obtidos com soluções analíticas.

Palavras-chave: Biot; Modelagem sísmica; Diferenças finitas.

POROUS ACOUSTIC BIOT SYSTEM SOLUTION USING FOURTH ORDER FINITE-DIFFERENCE OPERATORS - *We present a model to simulate low frequency wave propagation in a fluid-saturated poro-acoustic in 2-D medium using the finite-difference method. We accomplish it by solving the equations of motion based on Biot's theory. The finite-difference scheme is explicit and uses operators which are fourth order accurate in space and second order accurate in time. The results are obtained for two different models. The first one considers the propagation of waves in complex environments of hydrocarbon reservoirs. The second model has no heterogeneities but it serves to verify how the viscosity attenuates the medium seismic response. The energy source used by us shares among the solid and fluid phases, and it is possible to observe that the amplitude of fluid displacement converges to the amplitude of solid displacement during propagation. The second model points to the range of viscosities which give rise to the slow P-wave. The finite differences model yields the same travel times both for the slow and the fast P-waves, than as those obtained analitically.*

Key words: Biot; Seismic modeling; Finite-difference.

Programa de Pesquisa e Pós-Graduação em Geofísica
UFBA - Campus Universitário de Ondina - Instituto de Geociências
Rua Barão de Geremoabo, s/nº, Federação
CEP 40.170-290 Salvador - BA

INTRODUÇÃO

Existem diversas técnicas numéricas para simular a propagação de ondas em meios discretos dentre os quais destacam-se as técnicas de diferenças finitas e dos elementos finitos. A técnica de diferenças finitas é a mais empregada na simulação de dados sísmicos, embora a técnica dos elementos finitos seja uma aproximação alternativa que produz resultados semelhantes aos da técnica de diferenças finitas (Kelly et al., 1976). Um tratado geral sobre a técnica dos elementos finitos foi apresentado por Strang & Fix (1973) e investigações posteriores foram feitas por Bamberger et al. (1980), utilizando o método dos elementos finitos.

Neste trabalho usamos a técnica de diferenças finitas para o modelamento do meio acústico poroso simulando a propagação em um meio bidimensional, observando as limitações desta técnica quanto à estabilidade do processo, ou seja, os limites para a convergência da simulação numérica ou limite de estabilidade, e também o problema da dispersão numérica que é um resultado da má amostragem da função fonte da onda no tempo e/ou no espaço.

Os primeiros trabalhos significativos na solução da equação da onda por diferenças finitas foram apresentados por Alterman & Karal (1968), Alterman & Loewenthal (1970), Ottaviani (1971) e Ilan & Loewenthal (1976). O trabalho de Boore (1972), juntamente com as extensões de Kelly et al. (1976), introduziram algoritmos de diferenças finitas para a solução da equação da onda usando uma malha convencional para aproximação das condições de contorno através das interfaces e considerando um meio heterogêneo. Madariaga (1976) efetuou a propagação em meios heterogêneos resolvendo o sistema de equações com derivadas de primeira ordem em uma malha alternada, encontrando resultados diferentes, se comparados com a solução do sistema de equações com derivadas de segunda ordem. Uma aproximação da equação acústica da onda pela equação unidirecional foi usada por Claerbout (1970), mostrando uma boa performance no tempo de computação, a qual é semelhante à aproximação parabólica da equação da onda que tem várias aplicações na acústica submarina (vide McDaniel, 1975). Em uma discussão apresentada por Joly (1986), a implementação numérica da equação da onda unidirecional fornece uma boa aproximação para ondas transmitidas, mas apresenta problemas com o

espalhamento do campo de onda e com as reverberações, bem como com a simulação das ondas de superfície, que não podem ser modeladas totalmente.

Neste trabalho serão usados os operadores centrais de diferenças finitas, definidos a partir da expansão de Taylor, de maneira análoga a apresentada em Botelho (1986), porém aplicados à equação da onda, considerando o sistema de Biot (Biot, 1956a). Este trabalho pode ser considerado uma extensão do trabalho feito por Hassanzadeh (1991), onde também é usado o sistema de equações de Biot. Entretanto, o presente trabalho traz as seguintes modificações: o aumento da aproximação do operador de diferenças finitas para quarta ordem nas derivadas do espaço e o uso de malha retangular para reduzir o problema de dispersão numérica para a propagação da onda transmitida na direção horizontal. O processo de propagação é feito usando o sistema de coordenadas cartesianas, espaço (x-z), com uma malha retangular, descrevendo a distribuição dos parâmetros petrofísicos, usando uma aproximação de quarta ordem para as derivadas no espaço e uma aproximação de segunda ordem para as derivadas no tempo.

São usados dois modelos com geometrias distintas para se obter dados sísmicos sintéticos, que aqui serão analisados, modelos estes elaborados para simular, da forma mais real possível, estruturas que ocorrem naturalmente em reservatórios. A função fonte usada no modelamento é a derivada da função *gaussiana*. A assinatura da fonte bem como seu espectro de frequência são mostrados na Fig. 1. O primeiro modelo simula um ambiente de reservatório formado por uma estrutura de anticlinal, onde a rocha reservatório é formada por uma camada porosa contendo vários níveis saturados com fluidos distintos. O tempo de amostragem do campo de onda no tempo é: $\Delta t = 1 \text{ ms}$. O segundo modelo, onde o tempo de amostragem foi reduzido para $\Delta t = 0,1 \text{ ms}$, simula um meio homogêneo para verificar, de forma mais precisa, o comportamento da propagação da onda P diante da variação da viscosidade, onde se quer observar a onda compressional de segunda espécie de acordo com Biot (1956a). Os resultados numéricos são comparados com outros obtidos com equações empíricas empregadas no cálculo da velocidade da onda de segunda espécie. Os resultados obtidos com o modelamento numérico são mostrados na forma de Instantâneos, sismogramas registrados na superfície e sismogramas registrados na vertical, simulando perfis VSP-*Vertical Seismic Profile*.

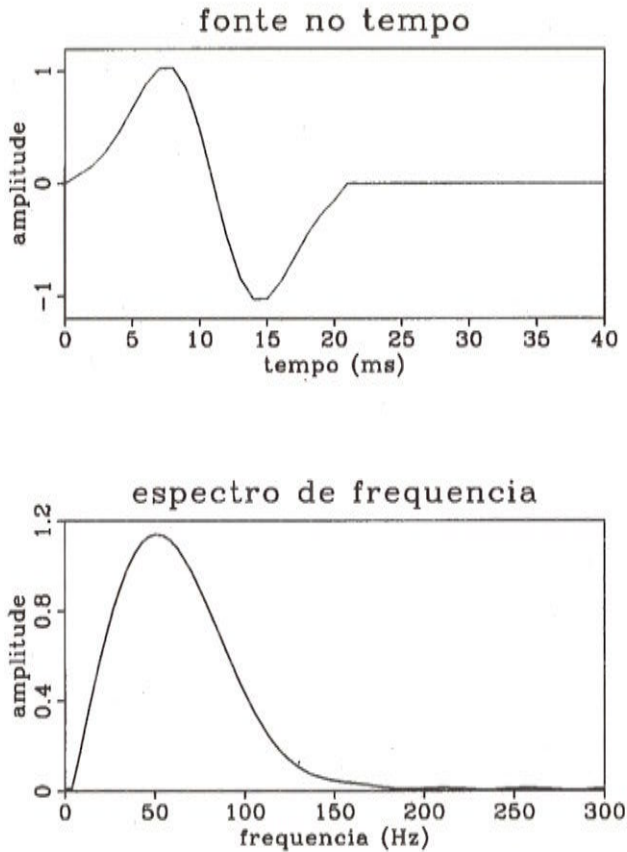


Figura 1 - Gráfico da função fonte com a forma da derivada Gaussiana usada no modelamento sísmico e sua respectiva transformada de Fourier, com tempo de amostragem de $\Delta t = 1$ ms.

Figure 1 - The Gaussian derivative shaped wavelet and its Fourier transform, used for seismic modeling. The sampling rate is $\Delta t = 1$ ms.

RELAÇÕES EMPÍRICAS PARA O MEIO DE BIOT

A teoria de Gassmann para meios bifásicos não considera o movimento relativo fluido-sólido. Esta hipótese pode ser reconhecida para a propagação de ondas em baixas frequências, mas a teoria apresentada por Gassmann (1951) não especifica qual o valor de frequência que é considerado baixo. Além disso, é fácil perceber que tal movimento relativo resultaria em perda de energia, caso em que a teoria de Gassmann não proveria meios de avaliar os resultados de atenuação (White, 1983). A teoria de Biot considera, além dos parâmetros

descritos por Gassmann, a viscosidade do fluido (η) e a permeabilidade do meio (κ). Na teoria de Biot, a frequência característica do fluido é definida da seguinte forma:

$$f_c = \frac{\eta\phi}{2\pi\kappa\rho_f}, \quad (1)$$

onde, para frequências de propagação abaixo de f_c , o movimento do fluido em resposta ao incremento de pressão é controlado pelo arrasto viscoso contra o sólido e, para frequências acima de f_c , a inércia do fluido é dominante. Para descrever o efeito de acoplamento entre as partes sólido e fluido é usual introduzir o parâmetro τ , chamado de tortuosidade (Bourbié et al., 1987). A tortuosidade do meio, analisada por Berryman (1980), está relacionada com o processo dinâmico e é dada por:

$$\tau = 1 - r(1 - 1/\phi), \quad (2)$$

onde r é um fator a ser determinado a partir do modelo microscópico do fluido movendo-se no esqueleto sólido. Para o caso de um modelo onde o sólido é representado por partículas esféricas, $r = 1/2$. A tortuosidade, que deve satisfazer a condição ($\tau \geq 1$), está relacionada não somente com a porosidade como também com a geometria do meio onde o fluxo ocorre (Hassanzadeh, 1991).

Para o caso em que se considera o movimento do fluxo fluido em relação ao sólido, a aproximação de Geertsma & Smit (1961) para a solução do campo de velocidade da onda de primeira espécie é desenvolvida a partir do fator f_c/f , (Bourbié et al., 1987):

$$V_{p1}^2 = \frac{V_\infty^4 + V_0^4 \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}{V_\infty^2 + V_0^2 \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}, \quad (3)$$

onde V_0 e V_∞ são, respectivamente, as velocidades para os limites de frequência tendendo a zero e infinito, correspondendo à teoria de Biot. De acordo com a equação de Gassmann (1951), as expressões para V_0 e V_∞ podem ser dadas como:

$$V_0 = \left(\frac{k + \frac{4}{3}\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

e

$$V_{\infty} = \left[\left(k_0 + \frac{4}{3}\mu + \frac{\phi \frac{\rho}{\rho_f} \tau^{-1} + \beta(\beta - 2\phi\tau^{-1})}{(\beta - \phi) \frac{1}{k_s} + \frac{\phi}{k_f}} \right) \frac{1}{\rho_a} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

onde $\rho_a = \rho_s(1 - \phi) + \phi\rho_f(1 - \tau^{-1})$ e k é o módulo de elasticidade para meios porosos saturados, determinado pela equação de Gassmann. Para a onda compressional de segunda espécie, onde o movimento do fluido está fora de fase em relação ao sólido, nós consideramos a seguinte equação para a determinação do campo de velocidade:

$$V_{p_2} = \sqrt{\frac{k_f}{\tau\rho_f}} \quad (6)$$

equação esta baseada na lei de Terzaghi (Bourbié et al., 1987), a qual é restrita para porosidades abaixo de 20%, além de considerar que a) a incompressibilidade do fluido, k_f deve ser bem menor que a incompressibilidade do meio vazio, k_s , b) os efeitos de viscosidade são desprezados e c) os efeitos de tortuosidade são levados em consideração.

Neste trabalho, as Eqs. (3) e (6) são usadas para conferir os resultados da modelagem numérica obtidos a partir do sistema de Biot, a despeito das restrições citadas acima.

EQUAÇÃO DE BIOT

Os trabalhos de Biot (1956a; 1956b) estabelecem uma teoria sobre a propagação de ondas em meios porosos preenchidos por fluidos, levando em consideração vários fatores, como os efeitos da permeabilidade e do fluxo fluido relativo gerado quando o deslocamento da partícula fluida está fora de fase, comparado com o deslocamento da partícula sólida.

No desenvolvimento da teoria de Biot, são levadas em consideração as seguintes aproximações (Zhu & McMechan, 1991): 1) o comprimento de onda deve ser grande, se comparado com o elemento unitário do modelo; 2) o deslocamento

da partícula associado com o movimento da onda sísmica é pequeno, tanto para a fase sólida como para a fase fluida; 3) a fase fluida é contínua, ou seja, os poros não conectados entre si são tratados como parte da fase sólida, contribuindo com um efeito de densidade menor; 4) a matriz sólida é elástica, localmente homogênea e estatisticamente isotrópica; 5) o meio é totalmente saturado; 6) a frequência de propagação deve ser baixa, o suficiente para que o fluxo fluido seja descrito pela lei de Darcy e 7) a força da gravidade, os efeitos de espalhamento do campo de onda devido aos poros individuais e os efeitos termoclásticos, são desprezados.

O sistema de equações de Biot para ondas compressivas em um meio saturado poroso (vide Anexo I) é dado por:

$$\begin{aligned} \nabla^2(P_e + Q_e) &= \rho_{11}\ddot{\epsilon} + \rho_{12}\ddot{\epsilon} + b(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}) \\ \nabla^2(Q_e + R_e) &= \rho_{12}\ddot{\epsilon} + \rho_{22}\ddot{\epsilon} - b(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}), \end{aligned} \quad (7)$$

o qual, na forma matricial, é expresso por:

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\epsilon} \\ \ddot{\epsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Multiplicando o sistema acima pela matriz:

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix}^{-1},$$

temos, finalmente (Hassanzadeh, 1991):

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\epsilon} \\ \ddot{\epsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

onde

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [(\rho_{11}R - \rho_{12}Q) / \Gamma] \\ [(\rho_{12}P - \rho_{11}Q) / \Gamma] \\ [(\rho_{12}R - \rho_{22}Q) / \Gamma] \\ [(\rho_{22}P - \rho_{12}Q) / \Gamma] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(R + Q) / \Gamma \\ b(P + Q) / \Gamma \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\Gamma = PR - Q^2.$$

Para maiores detalhes sobre a dedução desta equação e o significado de cada termo, ver o Anexo I. Temos portanto a solução do campo de onda para as fases sólida e fluida, derivando assim dois tipos de ondas compressoriais: a onda compressional de primeira espécie, quando a partícula sólida se desloca em fase com a partícula fluida, movendo-se com velocidade V_{p1} , que é definida de forma idêntica para o meio de fase única, e a onda compressional de segunda espécie, quando a partícula sólida se desloca com defasagem em relação à partícula fluida, movendo-se com velocidade V_{p2} , bem menor que a velocidade V_{p1} , devido à sua dependência com a constante elástica do fluido.

Neste trabalho, foi realizada a modelagem da equação da onda considerando a densidade variável, para fazer uma comparação com o sistema de equações de Biot. Esta comparação é mostrada na Fig. 8. Para tanto, foram utilizados os campos de velocidades resultantes da solução da equação de Biot, sem considerar o termo de atenuação, conforme descritos abaixo (vide Biot, 1956a):

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varepsilon} \\ \ddot{\epsilon} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

Definindo $H = P + 2Q + R$ e a velocidade de referência V_c , dada pela forma:

$$V_c = \sqrt{\frac{H}{\rho}}, \quad (12)$$

bem como, introduzindo os parâmetros adimensionais de acordo com Biot (1956a):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{P}{H} & \sigma_{12} &= \frac{Q}{H} & \sigma_{22} &= \frac{R}{H} \\ \gamma_{11} &= \frac{\rho_{11}}{\rho} & \gamma_{12} &= \frac{\rho_{12}}{\rho} & \gamma_{22} &= \frac{\rho_{22}}{\rho}, \end{aligned} \quad (13)$$

a Eq. (11) pode ser definida a partir dos parâmetros adimensionais e da velocidade de referência V_c , de acordo com a seguinte equação:

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \epsilon \end{bmatrix} = \frac{1}{V_c^2} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varepsilon} \\ \ddot{\epsilon} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

onde uma das soluções pode ser dada como a seguinte:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= B_1 e^{i(kx - \omega t)} \\ \epsilon &= B_2 e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Sendo a velocidade deste campo de onda dada como $V = k/\omega$, considerando o parâmetro z , dado por

$$z = \frac{V^2}{V_c^2}, \quad (16)$$

e substituindo as Eqs. (15) e (16) na Eq. (14), encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} z(\sigma_{11}B_1 + \sigma_{12}B_2) &= \gamma_{11}B_1 + \gamma_{12}B_2 \\ z(\sigma_{12}B_1 + \sigma_{22}B_2) &= \gamma_{12}B_1 + \gamma_{22}B_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Eliminando as constantes B_1 e B_2 do sistema acima, temos a seguinte equação do segundo grau:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)z^2 - (\sigma_{11}\gamma_{22} - 2\sigma_{12}\gamma_{12} + \\ + (\sigma_{22}\sigma_{11})z + (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

A solução desta equação nos fornece duas raízes, z_1 e z_2 , que correspondem às ondas compressoriais de primeira e segunda espécie, respectivamente, e que são propagadas com as seguintes velocidades:

$$V_{p1}^2 = \frac{V_c^2}{z_1} \quad (19)$$

e

$$V_{p2}^2 = \frac{V_c^2}{z_2}. \quad (20)$$

Ressalta-se que estes valores são encontrados sem considerar a atenuação da onda no meio, que está relacionada com os parâmetros permeabilidade (κ), viscosidade (η) e porosidade (ϕ), e que está descrita na Eq. (44) do Anexo I, pelo parâmetro de atenuação b .

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BIOT COM OPERADORES DE QUARTA ORDEM

Considerando o sistema de equações de Biot para os meios saturados porosos, dado por:

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{S}} \\ \ddot{\mathbf{F}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{S}} \\ \dot{\mathbf{F}} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

onde $\mathbf{S}(x, z, t) = \mathbf{S}(m\Delta x, n\Delta z, k\Delta t) = \mathbf{S}_{m,n}^k$, é o deslocamento da partícula sólida no meio bidimensional e, $\mathbf{F}(x, z, t) = \mathbf{F}(m\Delta x, n\Delta z, k\Delta t) = \mathbf{F}_{m,n}^k$, é o deslocamento da partícula fluida, o operador laplaciano ∇^2 é descrito pelas variáveis x e z na forma:

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{S}_{m,n}^k + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{S}_{m,n}^k \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{F}_{m,n}^k + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{F}_{m,n}^k \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Os dois pontos sobre o elemento de deslocamento representam a derivada de segunda ordem no tempo, e o ponto isolado, a derivada de primeira ordem conforme:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{S}} \\ \ddot{\mathbf{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{S}_{m,n}^k \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{F}_{m,n}^k \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{S}} \\ \dot{\mathbf{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S}_{m,n}^k \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}_{m,n}^k \end{bmatrix}. \quad (23)$$

A solução das derivadas espaciais de segunda ordem vistas na equação anterior é obtida usando o operador de diferenças finitas com aproximação de quarta ordem, com os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{S}_{m,n}^k &= \frac{1}{12(\Delta x)^2} \left[-\mathbf{S}_{m-2,n}^k + 16\mathbf{S}_{m-1,n}^k - 30\mathbf{S}_{m,n}^k + 16\mathbf{S}_{m+1,n}^k - \mathbf{S}_{m+2,n}^k \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{S}_{m,n}^k &= \frac{1}{12(\Delta z)^2} \left[-\mathbf{S}_{m,n-2}^k + 16\mathbf{S}_{m,n-1}^k - 30\mathbf{S}_{m,n}^k + 16\mathbf{S}_{m,n+1}^k - \mathbf{S}_{m,n+2}^k \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{F}_{m,n}^k &= \frac{1}{12(\Delta x)^2} \left[-\mathbf{F}_{m-2,n}^k + 16\mathbf{F}_{m-1,n}^k - 30\mathbf{F}_{m,n}^k + 16\mathbf{F}_{m+1,n}^k - \mathbf{F}_{m+2,n}^k \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{F}_{m,n}^k &= \frac{1}{12(\Delta z)^2} \left[-\mathbf{F}_{m,n-2}^k + 16\mathbf{F}_{m,n-1}^k - 30\mathbf{F}_{m,n}^k + 16\mathbf{F}_{m,n+1}^k - \mathbf{F}_{m,n+2}^k \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Para a derivada de segunda ordem no tempo é usado o operador de diferenças finitas, com aproximação de segunda ordem, resultando na seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{S}_{m,n}^k = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[-\mathbf{S}_{m,n}^{k-1} - 2\mathbf{S}_{m,n}^k + \mathbf{S}_{m,n}^{k+1} \right] \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{F}_{m,n}^k = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[-\mathbf{F}_{m,n}^{k-1} - 2\mathbf{F}_{m,n}^k + \mathbf{F}_{m,n}^{k+1} \right]$$

e, finalmente, a derivada de primeira ordem no tempo é resolvida usando o operador de diferenças finitas de segunda ordem, obtendo-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S}_{m,n}^k = \frac{1}{2\Delta t} \left[\mathbf{S}_{m,n}^{k+1} - \mathbf{S}_{m,n}^{k-1} \right] \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}_{m,n}^k = \frac{1}{2\Delta t} \left[\mathbf{F}_{m,n}^{k+1} - \mathbf{F}_{m,n}^{k-1} \right]$$

De posse das soluções das derivadas por diferenças finitas apresentadas acima, temos a solução do campo de onda no instante de tempo $(t + \Delta t)$ para os elementos de deslocamento sólido e fluido ou sejam:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{m,n}^{k+1} &= (d_{22}D_1 - d_{12}D_2) / \det \\ \mathbf{F}_{m,n}^{k+1} &= (d_{11}D_2 - d_{21}D_1) / \det, \end{aligned} \quad (27)$$

onde:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{12} \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \right]^2 \left[-\mathbf{S}_{m-2,n}^k + 16\mathbf{S}_{m-1,n}^k - 30\mathbf{S}_{m,n}^k + 16\mathbf{S}_{m+1,n}^k - \mathbf{S}_{m+2,n}^k \right] \\ &+ \frac{1}{12} \left[\frac{\Delta t}{\Delta z} \right]^2 \left[-\mathbf{S}_{m,n-2}^k + 16\mathbf{S}_{m,n-1}^k - 30\mathbf{S}_{m,n}^k + 16\mathbf{S}_{m,n+1}^k - \mathbf{S}_{m,n+2}^k \right] \\ &+ \frac{b_1 \Delta t}{2} \left[\mathbf{S}_{m,n}^{k-1} - \mathbf{F}_{m,n}^{k-1} \right] + a_{11} \left[2\mathbf{S}_{m,n}^k - \mathbf{S}_{m,n}^{k-1} \right] \\ &+ a_{12} \left[2\mathbf{F}_{m,n}^k - \mathbf{F}_{m,n}^{k-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 = & \frac{1}{12} \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \right]^2 \left[-\mathbf{F}_{m-2,n}^k + 16\mathbf{F}_{m-1,n}^k - \right. \\
 & \left. -30\mathbf{F}_{m,n}^k + 16\mathbf{F}_{m+1,n}^k - \mathbf{F}_{m+2,n}^k \right] \\
 & + \frac{1}{12} \left[\frac{\Delta t}{\Delta z} \right]^2 \left[-\mathbf{F}_{m,n-2}^k + 16\mathbf{F}_{m,n-1}^k - \right. \\
 & \left. -30\mathbf{F}_{m,n}^k + 16\mathbf{F}_{m,n+1}^k - \mathbf{F}_{m,n+2}^k \right] \\
 & - \frac{b_2 \Delta t}{2} \left[\mathbf{S}_{m,n}^{k-1} - \mathbf{F}_{m,n}^{k-1} \right] + a_{21} \left[2\mathbf{S}_{m,n}^k - \mathbf{S}_{m,n}^{k-1} \right] + \\
 & + a_{22} \left[2\mathbf{F}_{m,n}^k - \mathbf{F}_{m,n}^{k-1} \right]
 \end{aligned} \quad (28)$$

e $\det = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}$, sendo os parâmetros d_{ij} , $(i,j) = 1,2$ definidos da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + \frac{b_1 \Delta t}{2} & a_{12} - \frac{b_1 \Delta t}{2} \\ a_{21} - \frac{b_2 \Delta t}{2} & a_{22} + \frac{b_2 \Delta t}{2} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

onde os parâmetros a_{ij} e b_{ij} , $(i,j) = 1,2$ são descritos na Eq. (10).

A FUNÇÃO FONTE

Para realizar o modelamento de ondas sísmicas propagando em meios saturados porosos foi usada como fonte a função correspondente à derivada da gaussiana, apresentada por Kelly et al. (1976), a qual é dada pela seguinte expressão no tempo:

$$f(t) = (T + f_s - t) e^{-[2\pi f_s (T + f_s - t) / 1,25]^2}, \quad (30)$$

onde f é a frequência dominante de propagação, T é o período da função de onda e f_s é a fase do sinal, ou seja uma medida de quanto o eixo de simetria da onda está deslocado da origem. O gráfico da função fonte e seu respectivo espectro de frequência são mostrados na Fig. 1, caso em que o tempo de amostragem é de 1 ms. Obedecendo ao número de pontos em que a função fonte deve ser amostrada no tempo, é possível usar este tipo de fonte para qualquer valor de tempo de amostragem, desde

que seja obedecida a frequência adequada de acordo com a relação abaixo:

Δt (ms)	4	2	1	0,5	0,2	0,1
f (Hz)	13	26	52	104	260	520

LIMITE DE ESTABILIDADE

O modelo espacial no qual é feito a simulação da propagação da onda é bidimensional, com a direção x correspondendo ao afastamento horizontal e a direção z , à profundidade. Para amostrar o campo de onda no espaço e representar a heterogeneidade do meio, é feito uma subdivisão do modelo em celas retangulares, sendo os espaçamentos Δx e Δz as dimensões horizontal e vertical, respectivamente.

De acordo com a condição de estabilidade apresentada em Botelho (1986) e Faria (1986), um dos espaçamentos, Δz , por exemplo, pode ser determinado de acordo com a relação que estabelece o limite de estabilidade em função dos outros parâmetros do modelo, sendo dado por:

$$\Delta z = \frac{V \Delta t}{\sqrt{0,75 - (V \Delta t / \Delta x)^2}}. \quad (31)$$

A relação que determina um dos espaçamentos em função do outro evita que haja divergência, ou seja, que haja um aumento crescente do erro inserido no processo de propagação de ondas, postos que há uma aproximação das derivadas em séries de Taylor, a partir das quais foram construídos os operadores de diferenças finitas, que resolvem estas derivadas, para simular o processo de propagação.

Para modelos heterogêneos, com várias camadas, apresentando valores diferentes de velocidades, o espaçamento deve ser calculado em função do maior valor de velocidade. Neste caso, quando a onda é propagada em camadas com velocidades menores, o problema de dispersão numérica deverá ocorrer tanto maior quanto menor forem os valores das velocidades.

Usando a facilidade da cela ser retangular, com ($\Delta x \neq \Delta z$), e considerando que a direção de propagação da onda já é conhecida (por exemplo, direção horizontal), simulando uma onda transmitida poço-a-poço podemos fazer uma melhor amostragem na direção da propagação, considerando

$\Delta x < \Delta z$. Com isso, tentamos reduzir a dispersão numérica em uma direção, em detrimento da outra. Para isso, usamos o segundo modelo, considerando o campo de velocidade igual a 1500 m/s, o tempo de amostragem $\Delta t = 0,1$ ms e a distância fonte-receptor de 140 m. Foram feitos 5 (cinco) testes com os valores diferentes para Δx e Δz , conforme descrito pela Tab. 1.

sentam os parâmetros petrofísicos que descrevem as seis camadas do modelo.

TAB. I $\Delta x \neq \Delta z$					
testes	1	2	3	4	5
$\Delta x(m)$	0,30	0,35	0,41	0,51	1,06
$\Delta z(m)$	1,06	0,51	0,41	0,35	0,30

Tabela 1 - Diferentes valores de Δx e Δz .

Table 1 - Different values for Δx and Δz .

O resultado é mostrado na Fig. 2 pelos traços sísmicos registrados no receptor, conforme mostrado no segundo modelo. De acordo com os resultados da Fig. 2 podemos observar que o valor de Δx não deve ser muito diferente do valor de Δz . Mesmo assim, tomando como exemplo o teste 2 da Tab. 1, onde Δx é menor que Δz , é verificado uma menor dispersão numérica na parte posterior da onda, como pode ser visto na Fig. 2.

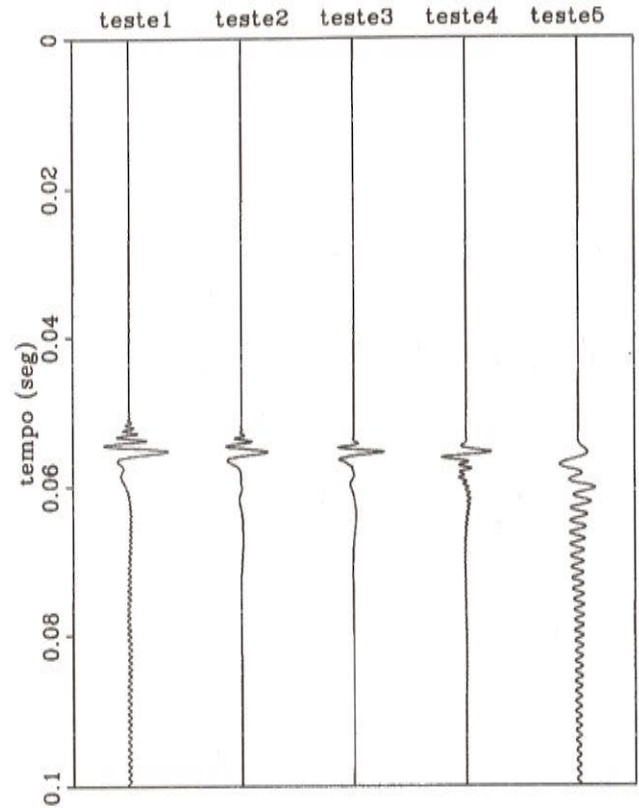


Figura 2 - Cinco testes de modelamento para diferentes valores de Δx e Δz , usando-se o segundo modelo com camada homogênea.

Figure 2 - Five modeling tests for different values of Δx and Δz , using a homogeneous medium.

RESULTADOS DA MODELAGEM

Para simular um meio bifásico geologicamente realístico nada melhor do que um ambiente de reservatório contendo como fluidos intersticiais gás, óleo e água, os quais estejam aprisionados por uma camada selante de folhelho. Esta armadilha estrutural formada por acamamentos curvos, simula um anticlinal. A geometria do primeiro modelo está ilustrada na Fig. 3; a Tab. 2 apre-

TAB. II DADOS E PARÂMETROS DO PRIMEIRO MODELO														
ca-mada	k_s	k_f	μ	k_o	k	ρ_s	ρ_f	ρ	κ	η	ϕ	f_c	τ	V_{p1}
	$\times 10^9 N/m^2$					kg/m^3			mD	cP	$\%$	Khz	-	m/s
1	13	3	8	6,5	12	2400	1000	2568	1	1	2	3200	25,5	2986
2	12,5	3	7	0,9	7,2	2650	400	2087	500	0,02	25	4	2,5	2811
3	12,5	5	7	0,9	9,2	2650	800	2187	500	100	25	9900	2,5	2907
4	12,5	7	7	0,9	10	2650	1000	2237	500	1	25	80	2,5	2975
5	13	7	8	3,7	12	2650	1000	2567	100	1	5	80	10,5	3002
6	14	7	8	7,0	14	2600	1000	2386	1	1	2	3200	25,5	3197

Tabela 2 - Dados e parâmetros do primeiro modelo.

Table 2 - Parameters of the first model.

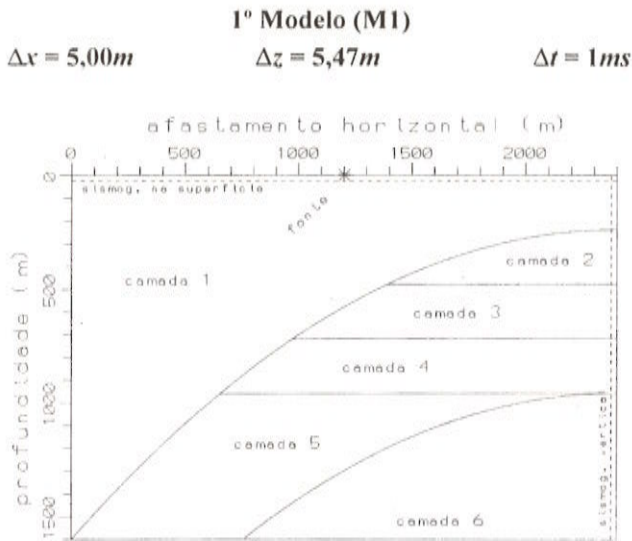


Figura 3 - Geometria do primeiro modelo (M1) simulando um reservatório de hidrocarbonetos.

Figure 3 - The geometry of the first model (M1) simulating a hydrocarbon reservoir.

De acordo com os dados apresentados na Tab. 2 e com as relações empíricas para o meio de Biot apresentadas no item 4, calculamos os parâmetros para o modelo M3, apresentados na Tab. 3, onde V_{p1} é a velocidade compressional da onda de primeira espécie calculada a partir da relação empírica de Geertsma & Smit (1961), descrita na Eq. (3).

A propagação do campo de onda P_1 através do modelo de reservatório é realizada usando a equação de Biot para meios acústicos porosos, resolvida pela técnica das diferenças finitas. Esta propagação é mostrada, através de instantâneos, na Fig. 4, para dois instantes de tempo, (A) 0,3 e (B) 0,5 segundos, evidenciando as reflexões nas interfaces curvas e as respostas sísmicas provenientes da superfície de contato entre os diferentes tipos de fluidos. Os instantâneos constituem uma ferramenta valiosa na interpretação dos dados sísmicos, posto que com eles é possível visualizar o comportamento espacial do campo de onda em qualquer instante de tempo, bem como a origem e a trajetória de qualquer evento e sua associação com os demais. Este recurso não é possível de ser obtido quando se emprega a técnica de traçamento de raios (Červený et al., 1977).

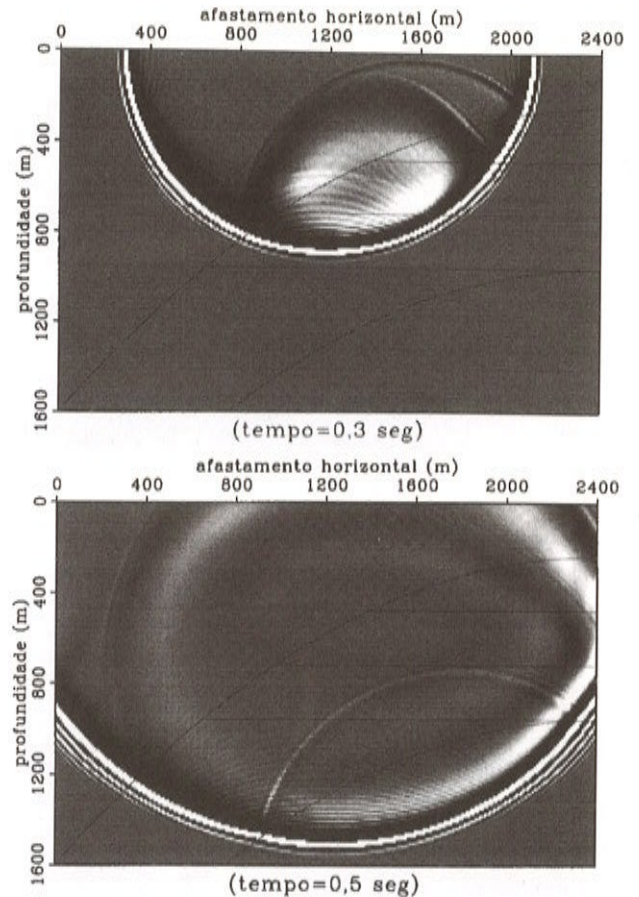


Figura 4 - Instantâneos gerados pela propagação de ondas sísmicas no primeiro modelo que simula um reservatório, nos instantes de tempo de 0,3 s e 0,5 s.

Figure 4 - Snapshots through the first model, simulating a reservoir, at times of 0.3 s and 0.5 s.

A Fig. 5 mostra dois sísmogramas, um registrado na superfície e outro registrado na direção vertical, simulando um VSP - *Vertical Seismic Profile*, sobre o modelo da Fig. 3. Uma outra vantagem do emprego da técnica de diferenças finitas na modelagem direta de dados sísmicos é que, em uma mesma propagação, é possível gerar simultaneamente sísmogramas correspondentes às famílias de tiro comum e perfis sísmicos verticais. Na verdade, podem ser obtidos diversos perfis sísmicos verticais com diferentes afastamentos para uma mesma detonação, sem aumentar o tempo de computação.

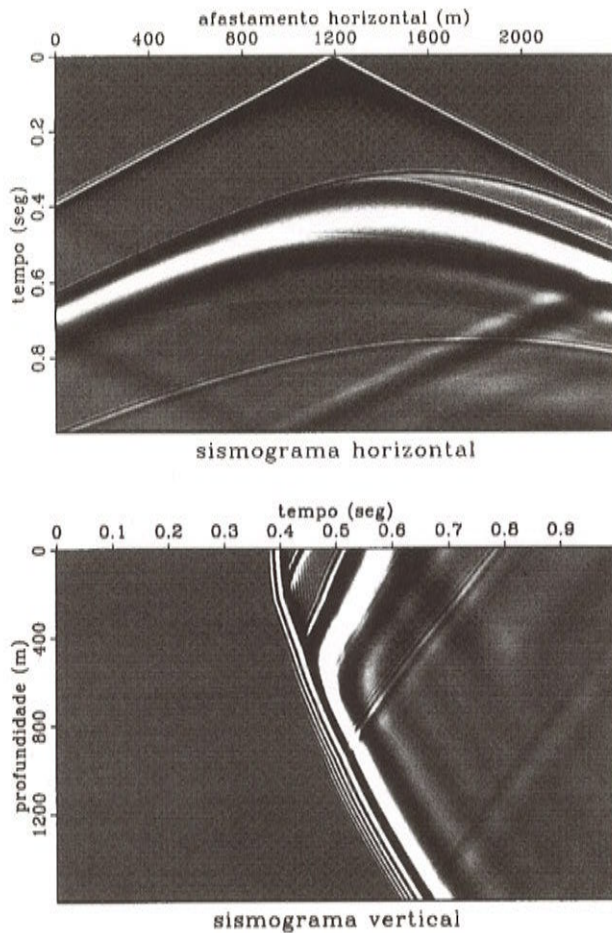


Figura 5 - Sismogramas horizontal e vertical gerados pela propagação de ondas sísmicas no modelo do reservatório M1, registrados com uma taxa de amostragem de 1 ms.

Figure 5 - Horizontal and vertical seismograms generated by seismic wave propagation in model M1, recorded with a sampling rate of 1 ms.

O segundo modelo é constituído por uma única camada e é usado para propagar a onda transmitida na direção horizontal, simulando um registro poço-a-poço, a uma pequena distância, para o qual teremos que aumentar a frequência de propagação para observarmos a onda

compressional de segunda espécie, prevista pela teoria de Biot (1956a). A geometria deste segundo modelo está ilustrada na Fig. 6.

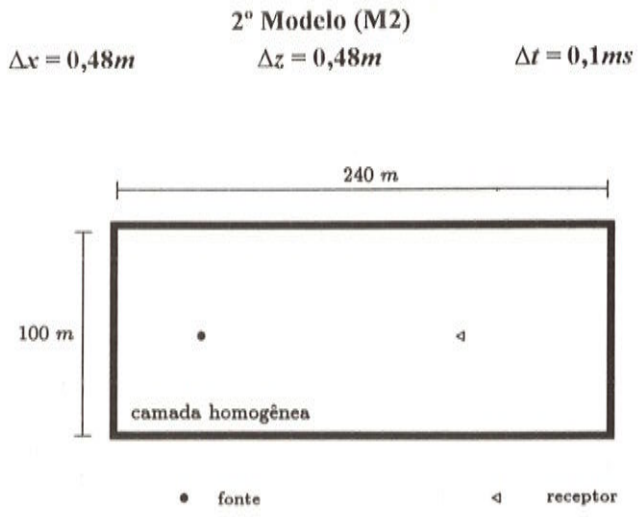


Figura 6 - O segundo modelo (M2), constituído por uma única camada homogênea, é usado para simular a propagação de ondas sísmicas em meios acústicos porosos, utilizando-se a equação de Biot e, principalmente, para verificar a existência da onda P₂ ou P-lenta, gerada pela solução das equações de Biot, com a técnica de diferenças finitas.

Figure 6 - Second model (M2) consisting of only one homogeneous layer which is used to show the seismic wave propagation in poroacoustic media. It shows the slow-P wave generated by finite-difference solution of Biot equations.

A Tab. 3 apresenta os dados do modelo de camada única. De acordo com estes dados e com as relações empíricas de Geertsma & Smit (1961), citadas anteriormente, podemos determinar parâmetros para este segundo modelo, onde V_{p1} e V_{p2} são as velocidades compressoriais das ondas de primci-

TAB. III		DADOS E PARÂMETROS DO SEGUNDO MODELO													
ca- mada	k_s	k_f	μ	k_o	k	ρ_s	ρ_f	ρ	κ	η	ϕ	f_c	τ	V_{p1}	V_{p2}
	$\times 10^9 N/m^2$					kg/m^3			mD	cP	%	Khz	-	m/s	
1	15	3	8	0,9	7,1	2650	1000	2155	400	0,01	30	120	2,17	2991	1176

Tabela 3 — Dados e parâmetros do segundo modelo.

Table 3 — Parameters of a second model.

ra e segunda espécie, respectivamente, calculadas a partir da solução analítica do sistema de Biot (vide Biot 1956a), e mostradas pelas Eqs. (3) e (6), respectivamente.

A propagação do campo de onda neste modelo é mostrada através de instantâneos, ilustrados pela Fig. 7, para três instantes de tempo, evidenciando as ondas de primeira e segunda espécie, resultantes da solução numérica por diferenças finitas com operadores de quarta ordem no espaço, do sistema de Biot.

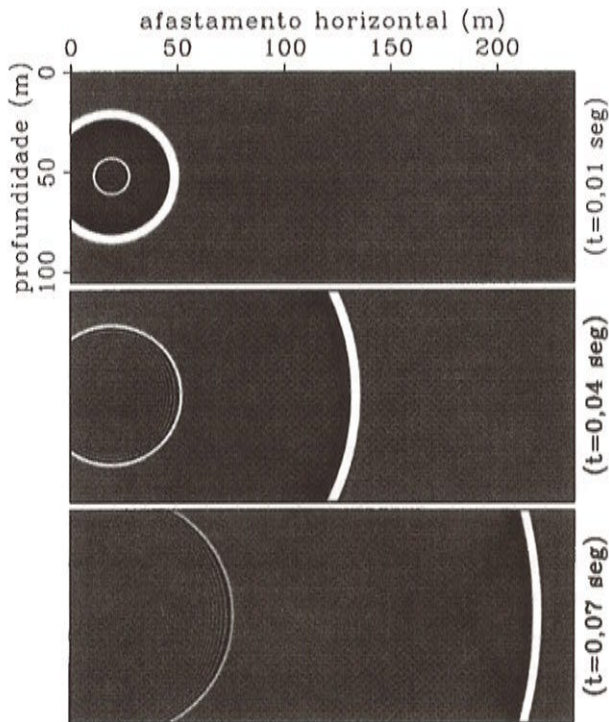


Figura 7 - Instantâneos das frentes de ondas gerados pela propagação de ondas sísmicas no segundo modelo, usando o sistema de equações de Biot, nos instantes de tempo 0,015, 0,044 e 0,120 segundos e mostrando as ondas P-rápida e P-lenta previstas pela teoria de Biot.

Figure 7 - Snapshots generated by second model, using the Biot's equations, at 0.015, 0.044 and 0.120 seconds, showing the fast and slow P waves predicted by Biot theory.

Com o único objetivo de verificar a exatidão dos resultados obtidos com a solução numérica do sistema de Biot, vamos comparar os mesmos com os valores de viscosidade usados na modelagem, variando de 10^{-5} a 10^{-6} cP, para que fosse possível observar a onda compressional de segunda

espécie. Podemos entender que, valores de viscosidade encontrados em fluidos que comumente ocorrem nos espaços porosos das rochas sedimentares, não permitem observar a segunda onda compressional, considerando a faixa de frequência sísmica e os parâmetros descritos no modelo do reservatório. Todavia, pode-se, com o aumento da frequência de propagação, e a redução das dimensões do modelo, observar a onda compressional de segunda espécie, mesmo para valores reais de viscosidade.

Na Fig. 8 aparecem os resultados obtidos por dois procedimentos distintos, mostrados pelos traços sísmicos registrados na mesma posição, usando o segundo modelo.

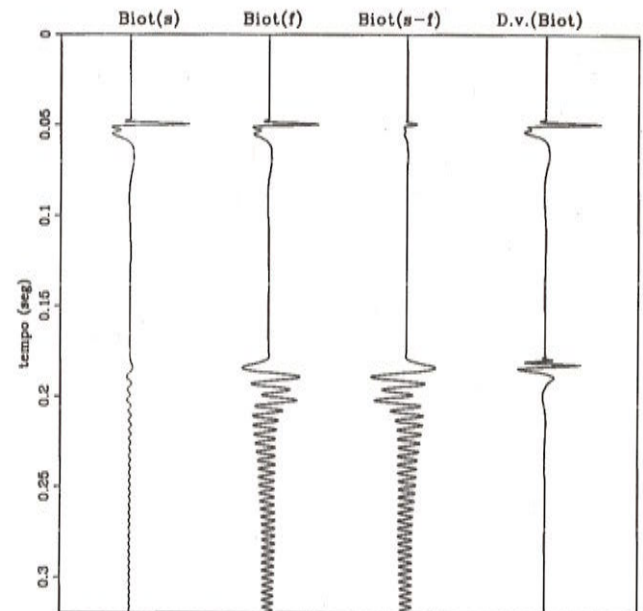


Figura 8 - Traços sísmicos mostrando as ondas compressionais de primeira e segunda espécie, derivados da solução por diferenças finitas do sistema de Biot (pode-se ver as contribuições da parte sólida, e da parte fluida e a diferença entre as duas). Além disso, comparou-se estes resultados com outro traço gerado pela solução por diferenças finitas da equação acústica da onda com densidade variável usando as velocidades das ondas P-rápida e P-lenta.

Figure 8 - Seismic traces showing the slow and fast P waves obtained by application of the finite-difference to solve the Biot system (we can see the solid and the fluid part contributions and also the difference among them). Besides the results were compared with another trace generated by the variable density acoustic wave equation solved by the finite-difference method using the velocities of fast and slow P waves.

O primeiro resultado é obtido pela propagação da onda usando o sistema de equações de Biot, o qual é mostrado pelos três traços da esquerda (Fig. 8), onde vê-se o deslocamento da partícula nas fases sólida e fluida, e a diferença entre elas. Podemos observar, no caso do sistema de Biot, a diferença entre os deslocamentos das partes sólida e fluida, onde, fisicamente, é explicada pelas diferentes massas inerciais das duas partes. O deslocamento sofrido pela parte sólida, durante a passagem da onda de segunda espécie, sugere uma perda de energia desta onda devido ao contato sólido-fluido.

No caso do modelamento numérico do sistema de Biot, a onda compressional de segunda espécie é mostrada com uma forte dispersão numérica. Isto é devido ao fato da cela ser dimensionada em função do maior valor de velocidade, no caso a velocidade da onda de primeira espécie. Portanto, para valores de velocidades menores que este estabelecido, a propagação da onda apresenta o problema de dispersão numérica. Para este caso acima, onde o valor da velocidade V_{p2} fica próximo de 1/4 do valor da velocidade V_{p1} , é inevitável o aparecimento da dispersão numérica. A solução para este tipo de problema será usar dois tipos de malhas, uma para cada onda. Um problema adicional reside no acoplamento existente entre as partículas sólida e fluida. Outra solução possível é o emprego de malhas alternadas, que diminuiria os efeitos da dispersão numérica. No segundo resultado, é feito um modelamento duplo com duas malhas diferentes, dimensionadas de maneira apropriada para cada velocidade, evitando desta forma a dispersão numérica na onda de segunda espécie.

Um primeiro grande inconveniente deste procedimento é que, na verdade, está se fazendo duas propagações acústicas em meios monofásicos, correspondendo à simulação de dois fenômenos distintos, com diferentes velocidades. Este procedimento serve tão somente para verificar os tempos de chegada das duas ondas geradas no meio bifásico, uma vez que as velocidades dos meios monofásicos correspondem a V_1 e V_2 , em cada propagação. O último traço corresponde à resposta sísmica obtida usando as velocidades previstas por Geertsma & Smit (1961) (vide Eqs. (3) e (6), a qual demonstra os erros na estimativa da chegada da onda de segunda espécie.

CONCLUSÕES

O uso de malha retangular com $\Delta x < \Delta z$ foi usado para dar maior precisão nos dados de transmissão de ondas propagadas na direção horizontal, evitando problemas com dispersão numérica, embora a diferença seja muita pequena, sendo possível observar uma pequena melhora na parte posterior da onda.

O modelamento da equação de Biot, considerando a distribuição de energia entre sólido e fluido com diferentes ponderações, mostrou que a amplitude do deslocamento de partículas sólida e fluida é proporcional à quantidade de energia destinada à parte sólida. Este resultado sugere que a ponderação da energia entre as partes sólida e fluida deve ser feita de acordo com a porosidade, considerando que, fisicamente, a energia que consegue realmente propagar é aquela destinada à parte sólida.

Verificou-se que é possível observar a onda P_2 de acordo com a teoria de Biot, embora a faixa de valores de viscosidade em que a onda de segunda espécie é observada esteja bem abaixo dos valores de viscosidades encontrados nos fluidos existentes nos modelos reais. Desta forma, torna-se difícil observar a onda compressional de segunda espécie prevista pela teoria de Biot (1956a); mesmo assim, supõe-se que, para valores reduzidos das dimensões dos modelos e com frequência de propagação bem mais alta, pode-se realizar a propagação da segunda onda, sendo possível percebê-la antes que ela seja completamente atenuada.

A teoria de Biot para meios acústicos porosos pode descrever com mais precisão a influência das variações dos parâmetros do meio que simula reservatórios nos atributos sísmicos. É possível realizar a modelagem sísmica simulando os meios bifásicos e usando a solução numérica das equações de Biot como ferramenta auxiliar no processo de caracterização dos reservatórios.

REFERÊNCIAS

- ALTERMAN, Z. & KARAL, F. C. - 1968** - Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **58**(1): 367-398.
- ALTERMAN, Z. & LOEWENTHAL, D. - 1970** - Seismic waves in a quarter and three-quarter plane. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **20**: 101-126.
- BAMBERGER, A., CHAVENT, G. & LAILLY, P. - 1980** - Etude de schémas numériques pour les equations de l'elastodynamique linéaire. *Inst. National de Recherche en Inform. et en Automatique, rapports de recherche, no. 41.*
- BERRYMAN, J. G. - 1980** - Long-wavelength propagation in composite elastic media, I. Spherical inclusions. *J. Acoust. Soc. Am.*, **77**: 954-961.
- BIOT, M. A. - 1956a** - Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, I: Low frequency range. *J. of Acous. Soc. Amm.*, **28**: 168-178.

- BIOT, M. A. - 1956b** - Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, II: Higher frequency range. *J. of Acous. Soc. Amm.*, **28**: 179-191.
- BOORE, D. M. - 1972** - Finite-difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous material. In Adler, B., Fernbach, S. and Rotenberg, M. (Eds.) *Methods in computation physics*, 2. Academic Press, 1-37.
- BOTELHO, M. A. B. - 1986** - Modelamento Sísmico na Bacia do Recôncavo usando a técnica de traçamento de raios. Tese de Doutorado, PPPG/UFBA.
- BOTELHO, M. A. B., & PINHEIRO, V. - 1996** - Três procedimentos para simular a propagação de ondas sísmicas em meios acústicos porosos: um estudo comparativo. *Revista Brasileira de Geofísica*, **14(2)**: 147-163.
- BOURBIÉ, T., COUSSY, O., & ZINSZNER, B. - 1987** - Acoustics of porous media. Paris, Gulf Publ. Co.
- ČERVENÝ, V., MOLOTOV, I. A. & PŠEŇČÍK, I. - 1977** - Ray Method in seismology, Praha, Univ. Kerlova.
- CLAERBOUT, J. F. - 1970** - Coarse grid calculations of waves in inhomogeneous media with application to delineation of complicated seismic structure. *Gephysics*, **35**: 407-418.
- FARIA, E. L. - 1986** - Migração antes do empilhamento utilizando propagação reversa no tempo. Dissertação de Mestrado, PPPG/UFBA.
- GASSMANN - 1951** - Elastic waves through a packing of spheres. *Geophysics*, **16**: 673-685.
- GEERTMA, J. & SMIT, D.C. - 1961** - Some aspects of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solids. *Geophysics*, **26**: 169-181.
- HASSANZADEH, S. - 1991** - Acoustics modeling in fluid-saturated porous media. *Gephysics*, **56**: 424-435.
- ILAN, A. & LOEWENTHAL, D. - 1976** - Instability of finite difference schemes due to boundary conditions in elastic media. *Geophys. Prosp.*, **24**: 431-453.
- JOLY, P. 1986**, Mathematical analysis of paraxial approximations to the wave equation in inhomogeneous media. *Analyse numérique et mathématique de modes de propagation d'ondes acoustiques, élastiques et electromagnetiques*. PhD thesis, Univ. de Parix IX, 273-443.
- KELLY, K. R., WARD W. R., TREITEL, S. & ALFORD, R. M. - 1976** - Synthetic seismograms: A finite-difference approach. *Geophysics*, **41**: 2-27.
- MADARIAGA, R. - 1976** - Dynamics of an expanding circular fault. *Bull Seism. Soc. Ama.*, **66(3)**: 639-666.
- MANDEL, J. - 1974** - Introduction à la mécanique des milieux continus. Académie Polonaise des Sciences, série B de Mécanique Appliquée, Éditions Scientifiques de Pologne.
- McDANIEL, S. T. - 1975** - Parabolic aproximations for underwater sound propagation. *J. Acoustic. Soc. Am.*, **58**: 1178-1185.
- OTTAVIANI, M. - 1971** - Elastic-wave propagation in two evenly wilded quarter spaces. *Bull. Seis. Soc. Am.*, **61**: 1119-1152.
- STOLL, R. D. - 1974** - Acoustic waves in saturated sediments. In Hampton, L. (Ed.), *Physics of sound in marine sediments*. Plenum Press.
- STRANG, G. & FIX, G. J. 1973**, An analysis of the finite element method. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall.
- WHITE - 1983** - Underground sound: application of seismic waves. Elsevier, Amsterdam.
- ZHU, X. & McMECHAN, G. A. - 1991** - Numerical simulation of seismic responses of poroelastic resevoirs using Biot theory. *Geophysics*, **56**: 328-339.

Submetido em: 29/01/95

Revisado pelo(s) autor(es) em: 25/05/96

Aceito em: 30/05/96

ANEXO I — O SISTEMA DE BIOT

Considerando um elemento de volume cúbico de tamanho unitário, representando um sistema sólido-fluido, pode-se separar as tensões em duas partes. Primeiro, as componentes de tensões atuando sobre a parte sólida, (Biot, 1956a), em cada face do cubo:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (32)$$

e, em segundo, as tensões atuando sobre a parte fluida, em cada face do cubo:

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Sabendo-se que a perturbação causada pela propagação da onda sísmica é um fenômeno rápido, o processo é adiabático (Bourbié et al., 1987). A partir dos conceitos gerais da mecânica dos fluidos (Mandel, 1974), é possível considerar a existência de um potencial volumétrico interno W tal, que, a sua diferencial representa o trabalho de deformação em uma transformação macroscópica infinitesimal.

Considerando $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ como o vetor deslocamento da partícula sólida, $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ como sendo o vetor deslocamento da partícula fluida, e a notação tensorial, $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$, onde x_j é a coordenada correspondente ao sistema cartesiano, pode-se definir o tensor de deformações da fase sólida para pequenas deformações:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}), \quad (34)$$

onde u_i é a componente do vetor deslocamento da partícula sólida na direção i . Para fase fluida a deformação ocorrida é tomada como uma dilatação no volume do fluido e é dada por;

$$\varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{U}, \quad (35)$$

onde $(\nabla \cdot)$ significa o divergente aplicado ao vetor deslocamento da partícula fluida.

No caso mais comum, onde não se tem uma distribuição volumétrica de momentos, observa-se que o tensor das tensões atuando sobre as faces do elemento de volume é simétrico: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Ademais, considerando que se está trabalhando com um sistema físico conservativo, qualquer deformação passa a ocorrer a partir de uma mudança do estado de energia potencial mínima. Assim, as componentes de tensões são funções lineares das componentes de deformações. A energia potencial por unidade de volume do meio saturado poroso é dado por:

$$2W = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + p\varepsilon, \quad (36)$$

onde as relações entre tensões e deformações podem ser dadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ p &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \quad (37)$$

A matriz dos coeficientes constitui uma matriz simétrica (7 x 7), com 28 coeficientes distintos (Biot, 1956a). No caso de se considerar o meio poroso estatisticamente isotrópico e a simetria da energia potencial na matriz dos coeficientes, tem-se então quatro constantes elásticas distintas:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + Q \varepsilon \\ p &= Q\varepsilon + R \varepsilon \end{aligned} \quad (38)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e $\varepsilon = \text{tr} \varepsilon_{ij}$ (traço de ε_{ij}) ou $\varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{u}$, correspondente à dilatação do sólido.

As constantes λ e μ , já definidas para o meio de fase única, são as constantes de Lamé, onde μ é o módulo de rigidez do sólido. O coeficiente R é uma medida de pressão, aplicada ao fluido para alterar um certo volume no fluido enquanto o volume total permanece constante. O coeficiente Q está relacionado com o acoplamento entre a mudança do sólido e do fluido. Quando a porosidade é considerada constante, os parâmetros λ , Q e R , na equação acima, podem ser expressos em termos de constantes mais usuais tais como, compressibilidade do fluido k_f , compressibilidade da matriz sólida k_s , compressibilidade do meio vazio k_o e porosidade ϕ (Geertsma & Smit, 1961; Stoll, 1974):

$$\begin{aligned} \lambda &= [(1 - \phi)(\beta - \phi)k_s + \phi k_s k_o / k_f] / \gamma - 2\mu / 3 \\ R &= \phi^2 k_s / \gamma \\ Q &= (\beta - \phi)\phi k_s / \gamma, \end{aligned} \quad (39)$$

onde

$$\gamma = \beta - \phi + \phi k_s / k_f \quad \text{e} \quad \beta = 1 - k_o / k_s.$$

Na análise da equação dinâmica da onda propagando em um meio bifásico deve-se considerar o conceito de coordenadas generalizadas, usando-se as equações de Lagrange para expressar a energia cinética total do sistema, de acordo com os seis componentes de deslocamento, sejam u_i para o sólido e U_i para o fluido (Biot, 1956a). A energia cinética do sistema (T) por unidade de volume pode ser expressa da seguinte forma:

$$2T = \rho_{11}\dot{u}_i\dot{u}_i + 2\rho_{12}\dot{u}_i\dot{U}_i + \rho_{22}\dot{U}_i\dot{U}_i. \quad (40)$$

Esta expressão é baseada na hipótese de que o meio é estatisticamente isotrópico, onde as direções (x, y, z) são equivalentes e dinamicamente independentes. As constantes

inerciais (ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{22}) levam em consideração o fato do fluxo fluido através dos poros não ser uniforme e serem definidos de acordo com a tortuosidade (τ) do meio, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= \rho_s(1 - \phi) + \rho_f \phi \tau \\ \rho_{12} &= \rho_f \phi(1 - \tau) \\ \rho_{22} &= \rho_f \phi \tau.\end{aligned}\quad (41)$$

De acordo com as equações de Lagrange, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) &= (\rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{U}_i) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_i} \right) &= (\rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{U}_i).\end{aligned}\quad (42)$$

Assumindo que o fluxo do fluido através dos poros ocorre em um regime laminar, ou seja, o número de Reynolds está abaixo de um valor crítico, e que a frequência de propagação não exceda a frequência característica do fluido, a função de dissipação que ocorre quando tem-se o fluxo fluido em relação ao sólido pode ser expressa da seguinte forma, vide (Biot, 1956a):

$$2D = b \left[(\dot{u}_i - \dot{U}_i)^2 \right] \quad (43)$$

onde o parâmetro b , que está relacionado com a lei de Darcy, é definido como:

$$b = \frac{\eta \phi^2}{\kappa} \quad (44)$$

sendo η a viscosidade, ϕ a porosidade e κ a permeabilidade do meio, sendo esta expressão somente válida para regime de fluxo laminar. De acordo com as equações de Lagrange, e considerando a função de dissipação, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_i} &= q_i \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{U}_i} &= Q_i,\end{aligned}\quad (45)$$

onde q_i e Q_i são as forças totais por unidade de volume atuando sobre as fases sólida e fluida, respectivamente. Substituindo a Eq. (42) em (45), tem-se:

$$\begin{aligned}\rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{U}_i + b(\dot{u}_i - \dot{U}_i) &= q_i \\ \rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{U}_i - b(\dot{u}_i - \dot{U}_i) &= Q_i.\end{aligned}\quad (46)$$

As componentes das forças totais q_i e Q_i podem ser expressas em termos dos gradientes das tensões, da seguinte forma (Biot, 1956a):

$$\begin{aligned}q_i &= \sigma_{y,j} \\ Q_i &= p_{,i}.\end{aligned}\quad (47)$$

Portanto, as equações dinâmicas em termos de componentes de tensões são dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{y,j} &= \rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{U}_i + b(\dot{u}_i - \dot{U}_i) \\ p_{,i} &= \rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{U}_i - b(\dot{u}_i - \dot{U}_i).\end{aligned}\quad (48)$$

Usando a Eq. (38) e fazendo-se a sua derivação tal como mostrado na Eq. (48), tem-se a relação dos coeficientes elásticos em função dos vetores deslocamentos das partículas sólida e fluida:

$$\begin{aligned}\mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla [(\lambda + \mu) \boldsymbol{\varepsilon} + Q \boldsymbol{\varepsilon}] &= \\ = \rho_{11} \ddot{\mathbf{u}}_i + \rho_{12} \ddot{\mathbf{U}}_i + b(\dot{\mathbf{u}}_i - \dot{\mathbf{U}}_i) \\ \nabla [Q \boldsymbol{\varepsilon} + R \boldsymbol{\varepsilon}] &= \rho_{12} \ddot{\mathbf{u}}_i + \rho_{22} \ddot{\mathbf{U}}_i - b(\dot{\mathbf{u}}_i - \dot{\mathbf{U}}_i),\end{aligned}\quad (49)$$

onde ∇ (função) significa o gradiente desta função. Aplicando o operador divergente para separar as ondas compressoriais, sabendo-se que $(\nabla \cdot \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon})$ e $(\nabla \cdot \mathbf{U} = \boldsymbol{\varepsilon})$ e fazendo $P = \lambda + 2\mu$, tem-se o sistema de equações de Biot para ondas compressoriais em um meio saturado como:

$$\begin{aligned}\nabla^2 (P \boldsymbol{\varepsilon} + Q \boldsymbol{\varepsilon}) &= \rho_{11} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho_{12} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + b(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\ \nabla^2 (Q \boldsymbol{\varepsilon} + R \boldsymbol{\varepsilon}) &= \rho_{12} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho_{22} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} - b(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}).\end{aligned}\quad (50)$$