

## ANÁLISE DOS MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS E EXPANSÃO RÁPIDA NA MIGRAÇÃO REVERSA NO TEMPO

Edvaldo S. Araujo<sup>1</sup> e Reynam C. Pestana<sup>2</sup>

Recebido em 31 julho, 2009 / Aceito em 13 outubro, 2010  
Received on July 31, 2009 / Accepted on October 13, 2010

**ABSTRACT.** In this work, we show that the wave equation solution using a conventional finite-difference scheme, derived commonly by the Taylor series approach, can be derived directly from the rapid expansion method (REM). Then, we show that if we use more terms from the REM one obtain a more accurate time integration of the wave field. Consequently, we have demonstrated that the REM is more accurate than the usual finite-difference schemes and it provides a wave equation solution which allows us to march in large time steps without numerical dispersion and is numerically stable. We also analyze the behavior of the Chebyshev and Taylor series coefficients to approximate the cosine function which appears in the analytical solution of the wave equation in time. The method is illustrated with pos and pre-stack migration results and it is shown that the REM for the time stepping combined with pseudo spectral operators for the spatial derivatives can be used to obtain numerically stable results with less computational effort than a conventional finite difference time stepping approach for the same level of accuracy.

**Keywords:** reverse time migration, finite difference, rapid expansion method.

**RESUMO.** Neste trabalho mostramos através da solução analítica da equação da onda no tempo e do método de expansão rápida (REM) que é possível obter a solução da equação da onda que utiliza esquemas de diferenças-finitas de qualquer ordem no tempo. Além disso, demonstramos que a grande vantagem do REM é que o método permite usar qualquer intervalo de amostragem temporal para realizar a extrapolação do campo de ondas, enquanto que o método de diferenças finitas impõe limites ao intervalo usado, devido à condição de estabilidade e à dispersão numérica. Fizemos também uma análise das aproximações em séries de Taylor e em polinômios de Chebyshev para a função cosseno que aparece na solução analítica da equação da onda no tempo. E finalizamos este trabalho mostrando o desempenho dos métodos numéricos na migração reversa no tempo pós e pré-empilhamento e demonstramos que o REM, combinado com o método espectral para calcular as derivadas espaciais, pode ser usado para obter resultados numericamente estáveis e com menor custo computacional do que um método de extrapolação do campo de ondas no tempo com um esquema de diferenças-finitas, dentro do mesmo nível de precisão.

**Palavras-chave:** migração reversa no tempo, diferenças finitas, método de expansão rápida.

---

<sup>1</sup>Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia (CPGG), Universidade Federal da Bahia, 123, Campus Universitário da Federação, 40170-290 Salvador, BA, Brasil. Tel.: (71) 3283-8531; Fax: (71) 3283-8501 – E-mail: esa@cpgg.ufba.br

<sup>2</sup>Departamento de Geofísica da Terra e do Meio Ambiente, Instituto de Física/CPGG, Universidade Federal da Bahia, 123, Campus Universitário da Federação, 40170-290 Salvador, BA, Brasil. Tel.: (71) 3283-8521; Fax: (71) 3283-8551 – E-mail: reynam@cpgg.ufba.br

## INTRODUÇÃO

A migração reversa no tempo (*reverse time migration* – RTM) baseada na equação da onda acústica é uma poderosa ferramenta para imagear estruturas geológicas complexas. O método admite fortes variações de velocidade na vertical e na horizontal. Além disso, o método não possui restrições quanto aos mergulhos que os refletores possam ter. Na RTM pós-empilhamento, o campo de onda registrado no receptor é propagado até o tempo  $t = 0$ . A especificação deste tempo é denominado de condição de imagem, o tempo em que ocorrem os eventos de reflexão. Já na RTM pré-empilhamento, a condição de imagem é definida pela correlação cruzada do campo de onda extrapolado da fonte e do receptor para cada passo no tempo.

Na literatura, a RTM tem sido implementada através da solução da equação da onda proveniente de vários métodos matemáticos. Dentre os métodos explícitos, temos: diferenças finitas (*finite difference* – FD), que faz uso da expansão de Taylor (Etgen, 1986); o método de expansão rápida (*rapid expansion method* – REM), que faz uso da expansão de Chebyshev (Kosloff et al., 1989) e o método “two-step explicit marching” (Soubaras & Zhang, 2008), que faz uso de uma expansão polinomial. Na indústria o FD explícito é normalmente utilizado para implementar a RTM. Todavia, o método FD não está imune aos problemas de estabilidade e dispersão numérica e, assim, precisa impor limites ao intervalo de amostragem temporal utilizado para realizar a extrapolação do campo de ondas. Para superar estes problemas, os dados sísmicos originais são reamostrados em um intervalo de tempo menor, aumentando o custo computacional. Já o REM permite usar qualquer intervalo de amostragem temporal sem apresentar problemas de estabilidade numéricas. O REM utiliza a expansão de Chebyshev para expandir a função cosseno que aparece na solução exata da equação da onda no tempo, explicitando assim o operador diferencial que se encontra no argumento da função cosseno.

Neste trabalho, analisamos o comportamento das expansões em séries de Taylor e em polinômios de Chebyshev e suas implicações sobre os métodos FD e REM na RTM. Também obtemos através do REM a solução da equação da onda por FD de qualquer ordem no tempo. Para isso, utilizamos uma aproximação analítica das funções de Bessel, para um argumento pequeno e desprezamos alguns termos da expansão. O método de Fourier é utilizado para calcular as derivadas espaciais que aparecem nas expansões da função cosseno por séries de Taylor e Chebyshev. Desta forma, conseguimos resultados numéricos estáveis e com um menor baixo custo computacional.

## SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA

A propagação da onda acústica é descrita através da equação

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -L^2 P, \quad (1)$$

onde

$$-L^2 = c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right). \quad (2)$$

A solução da Equação (1) usando as condições iniciais

$$P(x, z, t = 0) = P_0 \quad \text{e} \quad \left[ \frac{\partial P(x, z, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = \dot{P}_0, \quad (3)$$

é dada pela seguinte expressão:

$$P(t) = \cos(Lt) P_0 + \frac{\sin(Lt)}{L} \dot{P}_0. \quad (4)$$

Os campos de ondas  $P(x, z, t + \Delta t)$  e  $P(x, z, t - \Delta t)$  podem ser desenvolvidos usando a Equação (4). Adicionando esses dois campos, resulta em:

$$P(t + \Delta t) + P(t - \Delta t) = 2 \cos(L \Delta t) P(t). \quad (5)$$

Usando a expansão de Taylor na função  $\cos(L \Delta t)$  resulta em

$$P(t + \Delta t) + P(t - \Delta t) = 2 \left[ \sum_{\substack{k=0 \\ (k \text{ par})}}^{\infty} (-1)^{(k/2)} \frac{(\Delta t L)^k}{k!} \right] P(t). \quad (6)$$

Nota-se, portanto, que a variável de soma  $k$  da Equação (6) só pode assumir valores pares.

Considerando-se apenas os dois primeiros termos na Equação (6), temos a solução por FD de segunda ordem:

$$P(t + \Delta t) - 2P(t) + P(t - \Delta t) = -(\Delta t)^2 L^2 P(t). \quad (7)$$

Fazendo agora o índice  $k$  variar até 4 na Equação (6), resultará na solução por FD de quarta ordem:

$$P(t + \Delta t) - 2P(t) + P(t - \Delta t) = -(\Delta t)^2 L^2 P(t) + \frac{(\Delta t)^4}{12} L^4 P(t). \quad (8)$$

### Método de Expansão Rápida – REM

O REM foi apresentado por Kosloff et al. (1989) e tem origem na modificação feita no método de Tal-Ezer (1986) visando reduzir

pela metade o número de termos somados na série de Chebyshev. Usando o REM, podemos escrever  $\cos(L \Delta t)$  da seguinte forma:

$$\cos(L \Delta t) = \sum_{\substack{k=0 \\ (k \text{ par})}}^{\infty} C_k J_k(\Delta t R) Q_k\left(\frac{iL}{R}\right), \quad (9)$$

onde  $C_0 = 1$  e  $C_k = 2$  para  $k \neq 1$ ,  $J_k$  representa a função de Bessel de ordem  $k$  e  $Q_k$  são polinômios modificados de Chebyshev.  $Q_k(x)$  é definido como  $Q_k(x) = i^k T_k(ix)$ , onde  $T_k(x)$  denota os polinômios de Chebyshev. Uma vez que a Equação (9) contém somente termos pares, podemos então usar a relação de recorrência dos polinômios de Chebyshev:

$$Q_{2s+2} = 2Q_2 Q_{2s} - Q_{2s-2}. \quad (10)$$

O índice  $k$  do somatório e o índice  $s$  da Equação (10) se relacionam através da expressão  $k = 2s + 2$ . A Equação (10) é válida para  $s \geq 1$  e a recursão é iniciada com:

$$Q_0 = 1 \quad \text{e} \quad Q_2 = 2w^2 + 1. \quad (11)$$

A variável  $w$  em (11) é definida como  $w = iL/R$ . Para a propagação da onda em 2D, o valor de  $R$  é aproximadamente dado por:

$$R = \pi c_{\max} \sqrt{\left(\frac{1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{1}{dz}\right)^2}, \quad (12)$$

onde  $c_{\max}$  é a velocidade máxima na malha,  $dx$  e  $dz$  são os espaçamentos da malha (Tal-Ezer et al., 1987). A soma em (9) converge exponencialmente para  $k \geq \Delta t R$  e, por isso, o somatório pode ser truncado satisfatoriamente para um valor de  $k$  ligeiramente maior do que  $\Delta t R$  (Tal-Ezer et al., 1987).

**Derivando a solução de diferenças finitas a partir do REM**

Para mostrarmos que a solução da equação da onda no domínio do tempo obtida por FD pode ser derivada do REM, utilizaremos as Equações (5) e (9), resultando em

$$= 2 \left[ \sum_{\substack{k=0 \\ (k \text{ par})}}^{\infty} C_k J_k(z) Q_k(w) \right] P(t), \quad (13)$$

onde

$$w = \frac{iL}{R} \quad \text{e} \quad z = \Delta t R. \quad (14)$$

Considerando  $z \ll 1$ , as funções de Bessel podem então ser aproximadas pela expressão (Abramowitz & Stegun, 1965)

$$|J_k(z)| = \frac{|z|^k}{2^k k!}. \quad (15)$$

Os polinômios de Chebyshev presentes na Equação (9) são calculados através da expressão (10). Desprezando o termo  $Q_{2s-2}$  na Equação (10), temos então:

$$Q_{2s+2} \approx 2Q_2 Q_{2s}. \quad (16)$$

Fazendo  $s$  variar na Equação (16), percebemos que  $Q_{2s+2}$  pode ser também calculado pela seguinte expressão:

$$Q_{2s+2} \approx 2^s Q_2^{(s+1)} = 2^s (2w^2 + 1)^{s+1}. \quad (17)$$

O resultado na Equação (17) é demonstrado por indução em Araújo (2009). Usando agora o Binômio de Newton para desenvolvermos (17) tem-se:

$$Q_{2s+2} \approx 2^s \left[ \binom{n}{0} 1^0 (2w^2)^n + \binom{n}{1} 1^1 (2w^2)^{n-1} + \binom{n}{2} 1^2 (2w^2)^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} 1^n (2w^2)^0 \right], \quad (18)$$

onde

$$n = s + 1. \quad (19)$$

Considerando apenas o primeiro termo na expressão (18), usando a Equação (19) e a relação entre  $s$  e  $k$  tem-se:

$$Q_k = 2^{k-1} w^k. \quad (20)$$

Usando as Equações (15) e (20) em (13), resulta em

$$P(t + \Delta t) + P(t - \Delta t) = 2 \left[ \sum_{\substack{k=0 \\ (k \text{ par})}}^M \frac{|z|^k}{k!} w^k \right] P(t), \quad (21)$$

Substituindo agora, na expressão (21),  $w$  por  $\frac{iL}{R}$  e  $z$  por  $\Delta t R$ , tem-se:

$$= 2 \left[ \sum_{\substack{k=0 \\ (k \text{ par})}}^M (-1)^{(k/2)} \frac{(\Delta t)^k}{k!} L^k \right] P(t). \quad (22)$$

A expressão (22) é exatamente a solução da equação da onda no domínio do tempo por FD de qualquer ordem. Fazendo  $M = 2$  em (22) temos:

$$P(t + \Delta t) - 2P(t) + P(t - \Delta t) = -(\Delta t L)^2 P(t). \quad (23)$$

A Equação (23) é exatamente a solução da equação da onda usando uma aproximação de FD de segunda ordem. Fazendo agora  $M = 4$  em (22), temos a solução de quarta ordem por FD, isto é:

$$\begin{aligned} & P(t + \Delta t) - 2P(t) + P(t - \Delta t) \\ &= -(\Delta t L)^2 P(t) + \frac{(\Delta t)^4}{12} L^4 P(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Podemos ainda extrair outro resultado da expressão (22). Através da Equação (1) pode-se demonstrar indutivamente a seguinte relação:

$$\frac{\partial^{2s} P}{\partial t^{2s}} = (-1)^s L^{2s} P. \quad (25)$$

A relação entre o índice  $k$  do somatório na Equação (22) e o índice  $s$  na expressão (25) é  $k = 2s$ , para  $s \geq 1$ . Usando esta informação na Equação (25) tem-se:

$$\frac{\partial^k P}{\partial t^k} = (-1)^{k/2} L^k P \quad (26)$$

( $k$  assume somente valores pares).

Com auxílio da Equação (26), podemos reescrever a expressão (22) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & P(t + \Delta t) + P(t - \Delta t) \\ &= 2 \left[ \sum_{\substack{k=0 \\ (k \text{ par})}}^M \frac{(\Delta t)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right] P(t). \end{aligned} \quad (27)$$

Da expressão (27), fazendo  $M = 4$  podemos obter o resultado (Dablain, 1985)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[ P(t + \Delta t) - 2P(t) \right. \\ &\quad \left. + P(t - \Delta t) - \frac{(\Delta t)^4}{12} \frac{\partial^4 P}{\partial t^4} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Concluimos assim que na solução da equação da onda usando o REM temos os termos provenientes da solução por FD de alta ordem no tempo. Observamos também, que tanto o REM com o FD permitem o cálculo das derivadas temporais através das derivadas espaciais.

As Figuras 1 e 2 mostram a expansão da função  $\cos(\phi)$  pela série de Chebyshev e pela série de Taylor. As notações  $g(\phi)$  e  $h(\phi)$  referem-se às aproximações provenientes do uso das séries de Chebyshev e Taylor respectivamente. O  $\phi$  é definido como  $\phi = L \Delta t$  e  $\phi_{\max}$  é determinado pela expressão

$\phi_{\max} = \Delta t R$ . Considerando o caso 2-D onde  $\Delta x = \Delta z = 0,012 \text{ km}$ ,  $c_{\max} = 4,480 \text{ km/s}$  e  $\Delta t = 2 \text{ ms}$ , temos então que  $\phi_{\max} = 3,3 \text{ rad}$ . Nas Figuras 3 e 4 temos os gráficos dos erros devido ao truncamento das expansões utilizadas, onde  $e1(\phi) = |\cos(\phi) - g(\phi)|$  e  $e2(\phi) = |\cos(\phi) - h(\phi)|$ . Na Figura 5 temos um gráfico que mostra o comportamento do termo  $a_k = (\Delta t)^k / k!$  (Eq. (22)) e do termo  $d_k = C_k J_k(\Delta t R)$  (Eq. (13)) quando fazemos variar o índice  $k$ .

Observamos na Figura 5 que o termo  $d_k$  decresce assintoticamente, enquanto o termo  $a_k$  decresce rapidamente para zero. Os outros gráficos mostram que utilizando 3 ou 4 termos da expansão de Chebyshev, consegue-se representar bem a função  $\cos(\phi)$  no intervalo  $[0, \phi_{\max}]$ . Já na expansão de Taylor, para a mesma situação considerada, foram necessários 4 termos a fim de representar bem a função  $\cos(\phi)$  em todo o intervalo considerado. Para  $\phi \rightarrow 0$  as duas expansões fornecem excelentes aproximações da função  $\cos(\phi)$  com a mesma quantidade de termos, conforme mostrado na Figura 4, pois os erros devido ao truncamento das séries são praticamente nulos.

## RESULTADOS NUMÉRICOS

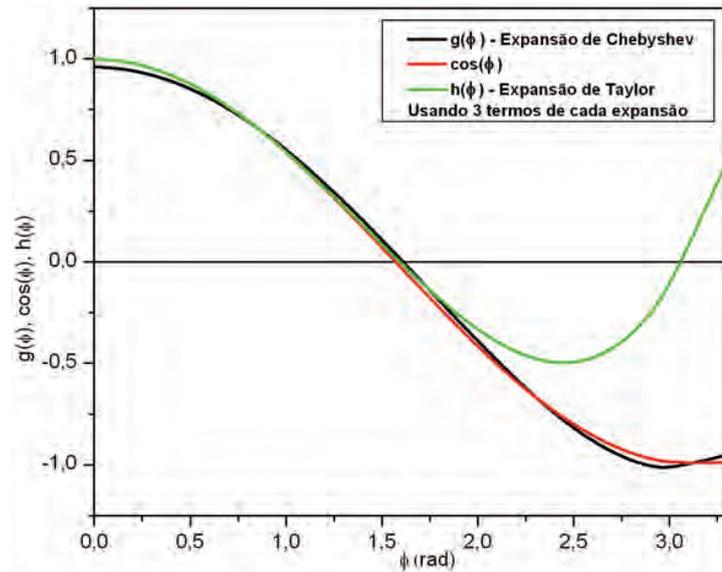
### Dados sintéticos: modelo-1 SEG-EAGE

Usamos o REM e o FD na RTM para migrar os dados sísmicos do modelo sintético SEG-EAGE. O campo de velocidade é mostrado na Figura 6, com velocidades variando de 1524 m/s a 4481 m/s. O espaçamento da malha nas direções  $x$  e  $z$  é de 0,012 km. Na Figura 7, temos os dados sintéticos originais, onde o intervalo de amostragem é de 8 ms, com 626 amostras por traço. Neste trabalho utilizamos os dados originais e os reamostrados para 2 ms e 4 ms.

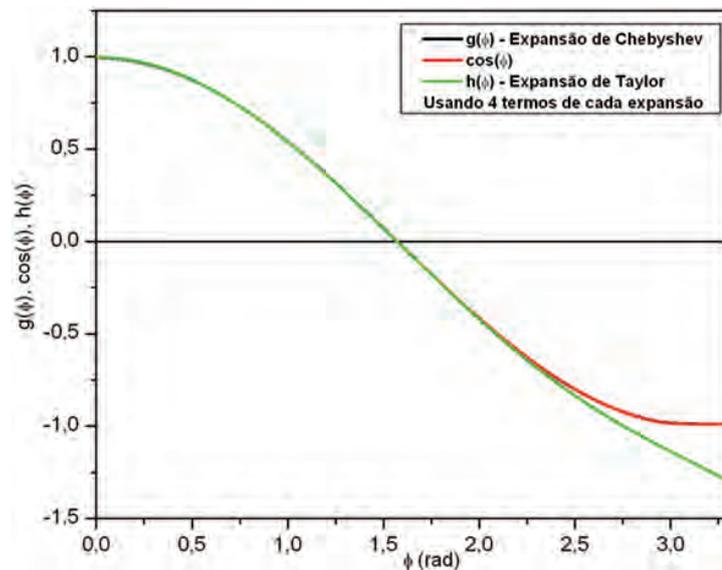
O critério de convergência do método de Tal-Ezer foi usado para determinarmos o número mínimo de termos do REM na RTM. Já no FD, fizemos uso da condição de estabilidade do método para determinarmos o número de termos necessários para a RTM.

### Discussão dos resultados do modelo-1 SEG-EAGE

Pelo critério de convergência da expansão de Chebyshev, para o índice  $k > \Delta t R$ , a expressão (13) converge. Observamos na Figura 8 que a quantidade mínima de termos da série ( $C_0 J_0 Q_0$ ,  $C_2 J_2 Q_2$  e  $C_4 J_4 Q_4$ ) não foi suficiente para colocar o refletor horizontal à uma profundidade de 3,51 km na posição correta, nem tampouco imagear todo o corpo de sal. Utilizando mais um termo da expansão ( $C_6 J_6 Q_6$ ), o resultado obtido foi excelente, as distorções comentadas anteriormente



**Figura 1** – Funções  $g(\phi)$ ,  $\cos(\phi)$  e  $h(\phi)$ ,  $\phi \in [0, \phi_{\max}]$ . A função  $h(\phi)$  apresenta uma boa aproximação da função  $\cos(\phi)$ , apenas para  $\phi \in [0; 1, 8]$ , enquanto que  $g(\phi)$  representa bem a função  $\cos(\phi)$  para  $\phi \in [0; \phi_{\max}]$ .

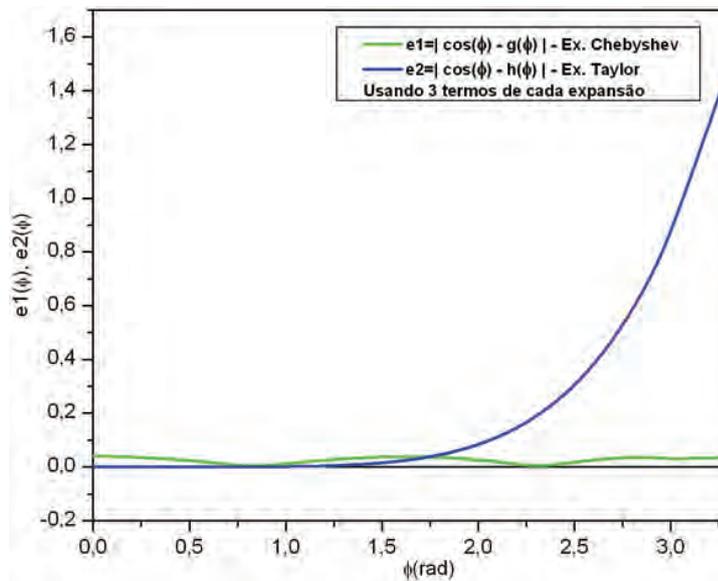


**Figura 2** – Funções  $g(\phi)$ ,  $\cos(\phi)$  e  $h(\phi)$ ,  $\phi \in [0, \phi_{\max}]$ . Para  $\phi \in [0; 2, 2]$  os gráficos de  $g(\phi)$  e  $h(\phi)$  coincidem com o da função  $\cos(\phi)$ . Já no intervalo  $\phi \in [2, 2; \phi_{\max}]$   $g(\phi)$  apresenta uma melhor aproximação do que  $h(\phi)$ .

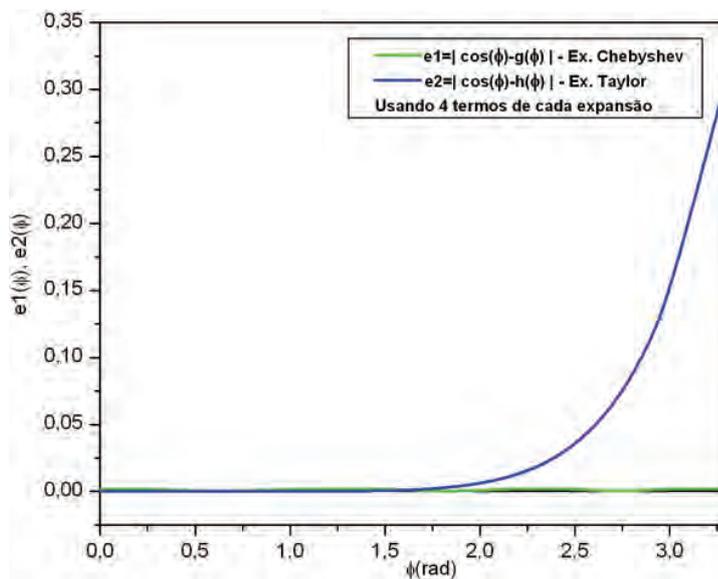
foram corrigidas, conforme mostra a Figura 9. Por FD foram necessários apenas os 3 primeiros termos da expansão de Taylor (Eq. (22)), conforme exigido pela condição de estabilidade para realizarmos a RTM dos dados sísmicos com  $\Delta t = 2 \text{ ms}$  (Fig. 12).

Nos dados sísmicos reamostrados para  $\Delta t = 4 \text{ ms}$ , a RTM usando o REM e a RTM usando o FD, ambos com 5 termos, ge-

raram ótimas imagens migradas, conforme Figuras 10 e 13. Já na Figura 11, temos um excelente resultado da RTM usando o REM com 8 termos. No que diz respeito ao uso do FD na RTM para os dados sísmicos originais, onde  $\Delta t = 8 \text{ ms}$ , não foi possível realizar a migração, em virtude de limitações numéricas. Para entendermos isso, é importante lembrarmos que quando o raio de convergência é muito menor que um, o termo  $a_k$  da série



**Figura 3** – Funções  $e1(\phi)$  e  $e2(\phi)$ ,  $\phi \in [0, \phi_{\max}]$ . Os erros  $e1$  e  $e2$  são pequenos no intervalo  $\phi \in [0; 1, 8]$ , enquanto para  $\phi \in [1, 8; \phi_{\max}]$   $e2$  começa a crescer e  $e1$  mantém o mesmo comportamento.



**Figura 4** – Funções  $e1(\phi)$  e  $e2(\phi)$ ,  $\phi \in [0, \phi_{\max}]$ . Os erros  $e1$  e  $e2$  são praticamente nulos para  $\phi \in [0; 2, 2]$ , enquanto para  $\phi \in [1, 75; \phi_{\max}]$   $e2$  começa a crescer rapidamente e  $e1$  se mantém aproximadamente nulo.

de Taylor tende rapidamente para zero, quando o índice do somatório da série vai aumentando. Para a mesma situação, o termo  $d_k$  da série de Chebyshev tende para zero assintoticamente. Este fato nos permite usar uma quantidade maior de termos da série de Chebyshev do que da série de Taylor para expandir a função  $\cos(\phi)$ . Assim, na RTM quando  $\Delta t$  é grande, o REM perma-

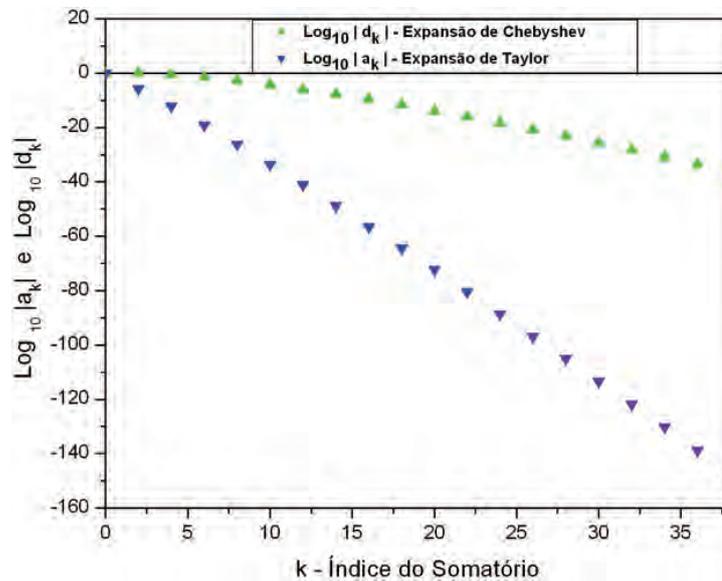
nece funcionando normalmente, uma vez que o método utiliza a expansão de Chebyshev. Já o método FD não é viável para o caso considerado, pois, quando  $\Delta t$  aumenta, é necessário uma quantidade maior de termos da série de Taylor a fim de satisfazer as condições de estabilidade e dispersão numérica. No entanto, devido a  $\Delta t$  ser da ordem de  $10^{-3}$  segundos, o termo

**Tabela 1** – Tempo gasto na RTM usando o REM.

Nº de amostras	$\Delta t$	REM	Tempo gasto
2504	2 ms	4 termos	14 min 9 s
1252	4 ms	5 termos	9 min 18 s
626	8 ms	8 termos	8 min 7 s

**Tabela 2** – Tempo gasto na RTM usando FD.

Nº de amostras	$\Delta t$	FD	Tempo gasto
2504	2 ms	3 termos	9 min 45 s
1252	4 ms	5 termos	9 min 36 s

**Figura 5** –  $\text{Log } |a_k|$  e  $\text{Log } |d_k|$  versus  $k$ , usando  $\Delta t = 2 \text{ ms}$ ,  $\Delta x = 0,012 \text{ km}$  e  $c_{\text{max}} = 4,480 \text{ km/s}$ .

$a_k$  da série de Taylor tende rapidamente para zero, eliminando por sua vez os termos necessários para realizar a migração. O mesmo não ocorre com o REM, já que a série de Chebyshev pega uma quantidade maior de termos até o termo  $d_k$  atingir a limitação numérica do computador. O comportamento dos termos  $a_k$  e  $d_k$  são mostrados na Figura 5, quando o índice do somatório varia. Os valores de  $a_k$  e  $d_k$  foram logaritimizados para que fosse possível traçar os gráficos. Da função logaritmica, sabemos que quando o logaritmo tende para  $-\infty$ , o logaritmando tende para zero numa dada base. Assim podemos concluir através dos gráficos que para valores crescentes de  $k$ , o termo  $a_k$  da série de Taylor tende a zero rapidamente em relação ao termo  $d_k$  da série de Chebyshev.

Nas Tabelas 1 e 2, temos o tempo gasto na RTM dos dados sísmicos usando os métodos FD e REM. Observamos na Tabela 1 e 2 que o menor tempo de processamento foi quando

utilizamos os dados originais. Percebemos assim, que é mais vantajoso usarmos o REM na RTM, uma vez que o método permite fazer a extrapolação do campo de ondas no tempo com um intervalo de amostragem relativamente grande, reduzindo assim o tempo de processamento. Para realizarmos a RTM, utilizamos um computador com processador Pentium IV de 3,20 GHz e 4 GB de RAM.

#### Dados sintéticos: modelo-2 SEG-EAGE

O modelo-2 SEG-EAGE (Fig. 14) representa uma almofada de sal associada a uma configuração espacial de refletores e falhamentos com razoável complexidade estrutural. Os dados sintéticos foram gerados com 100 tiros. O primeiro tiro localiza-se em  $x = 0,2 \text{ km}$  e o espaçamento entre os tiros é de 0,13 km. Para cada tiro tem-se 675 receptores com um espaçamento de 20 m. Tanto as fontes como os receptores foram distribuídos ao longo

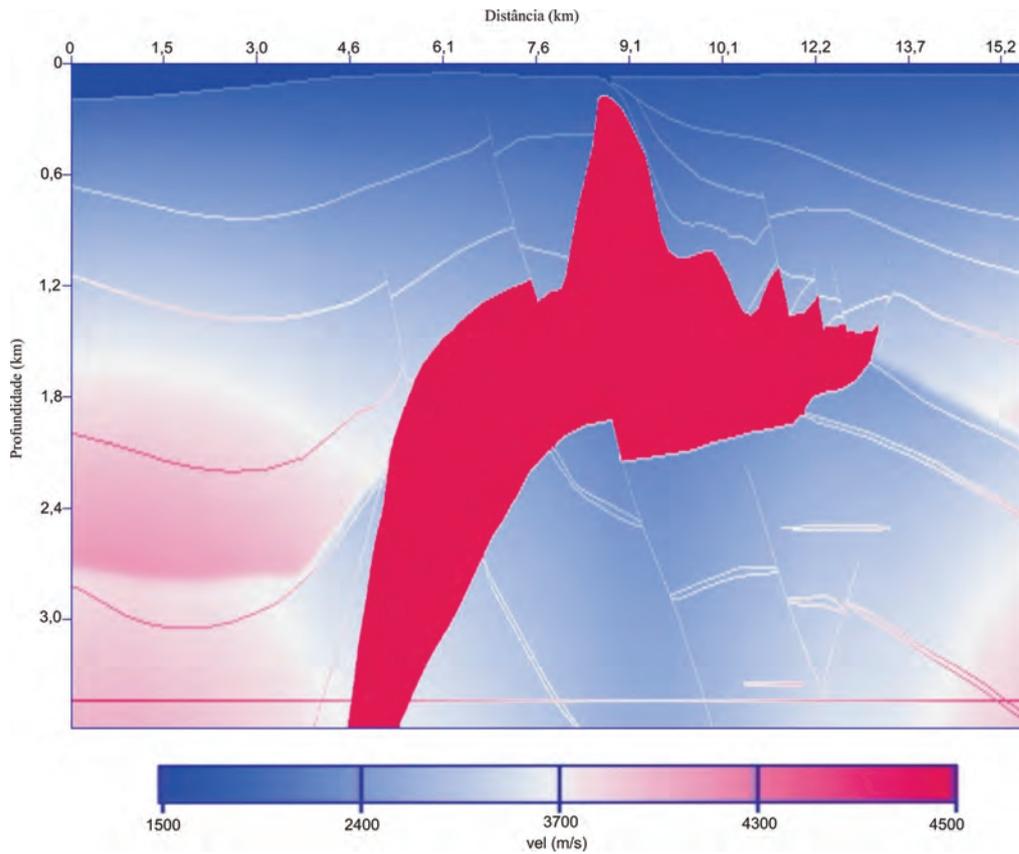


Figura 6 – Campo de velocidade do modelo-1 SEG-EAGE.

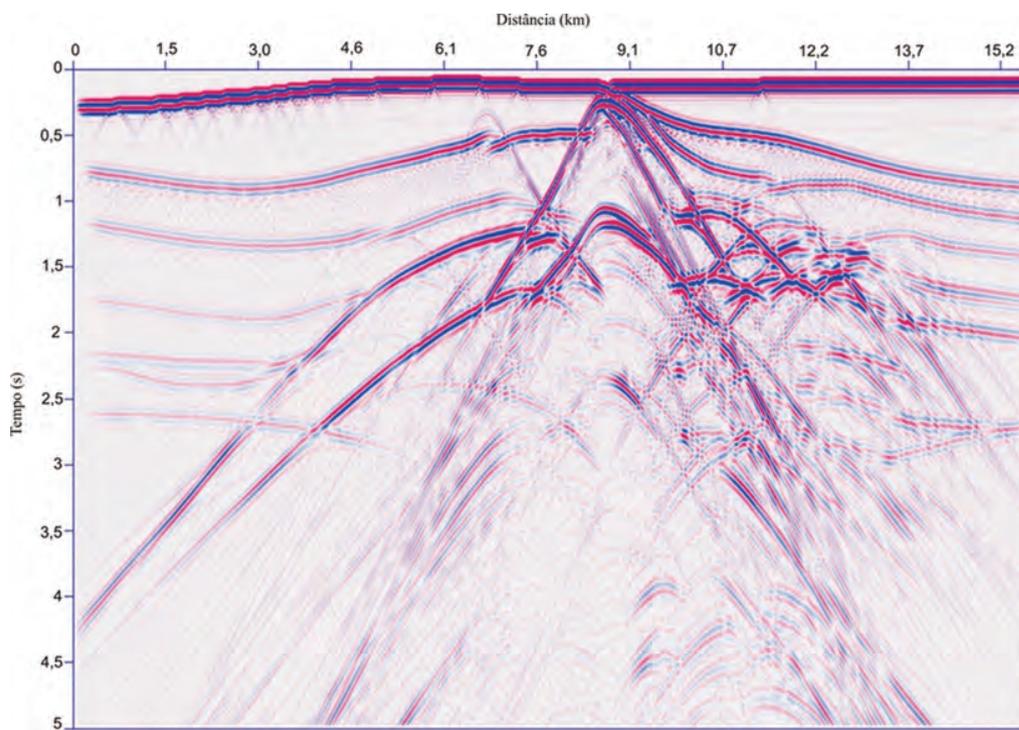
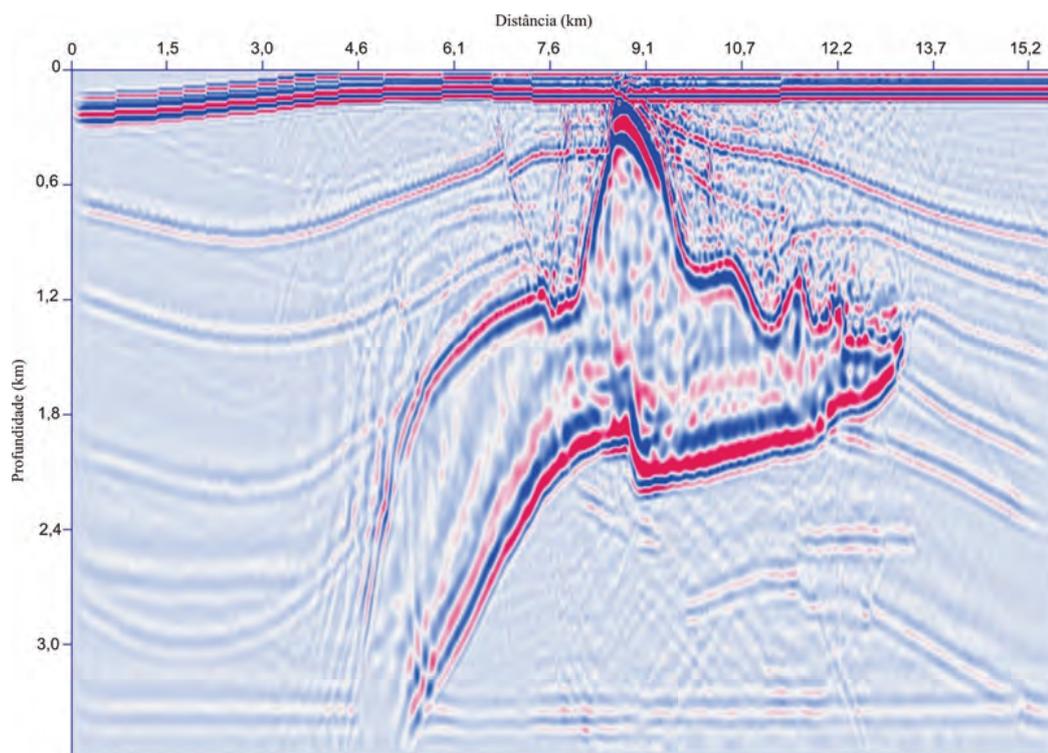
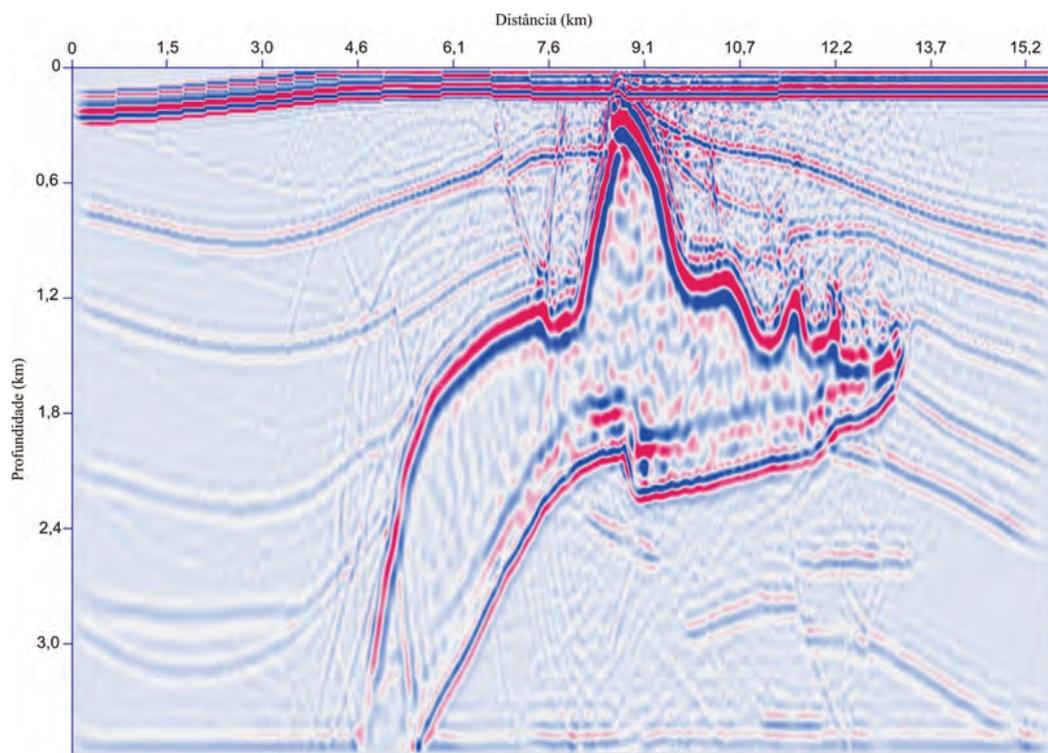


Figura 7 – Seção de afastamento nulo dos dados do modelo-1 SEG-EAGE.



**Figura 8** – Resultado da RTM usando o REM com 3 termos para os dados do modelo-1 SEG-EAGE reamostrados em 2 ms.



**Figura 9** – Resultado da RTM usando o REM com 4 termos para os dados do modelo-1 SEG-EAGE reamostrados em 2 ms.

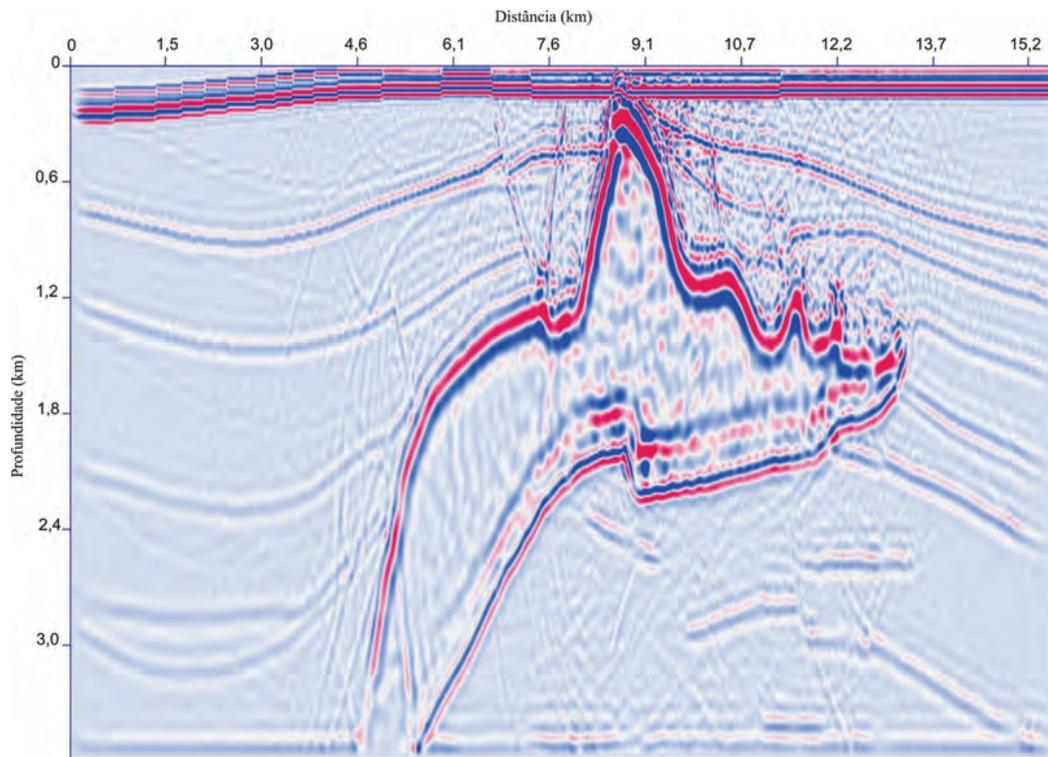


Figura 10 – Resultado da RTM usando o REM com 5 termos para os dados do modelo-1 SEG-EAGE reamostrados em 4 ms.

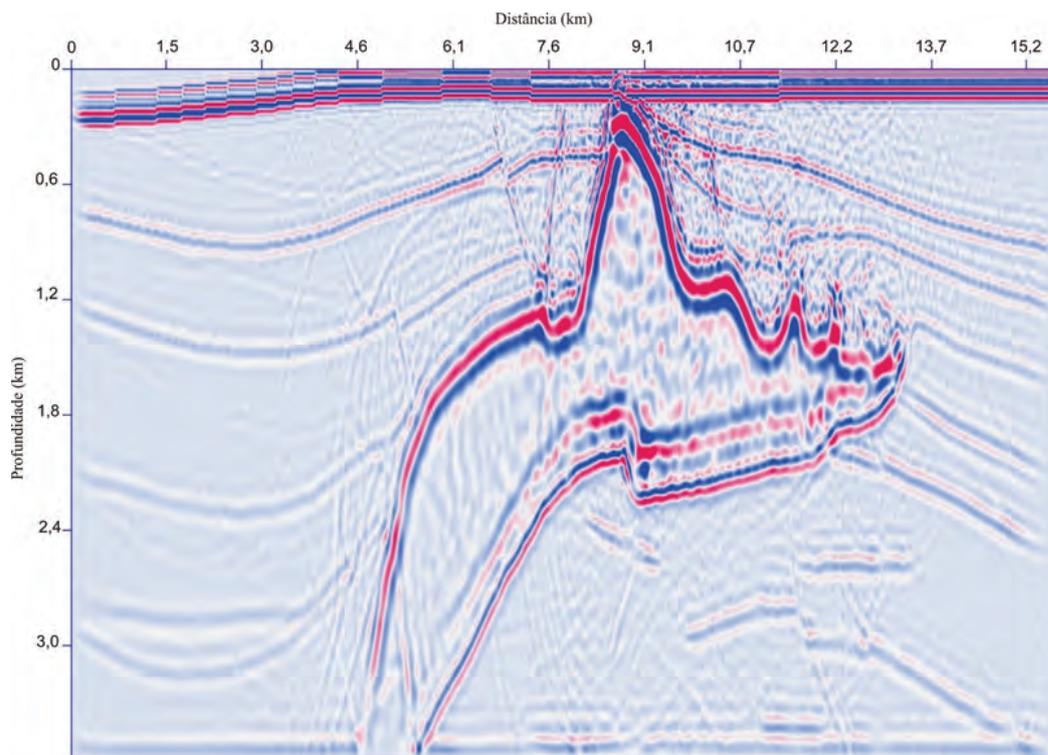
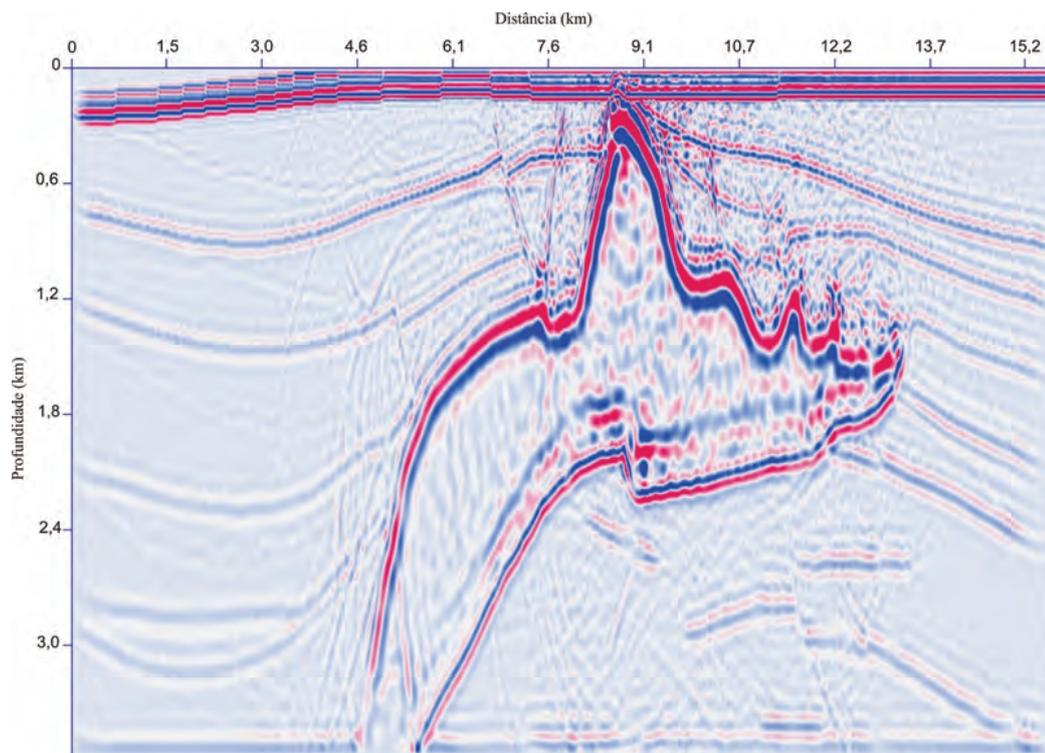
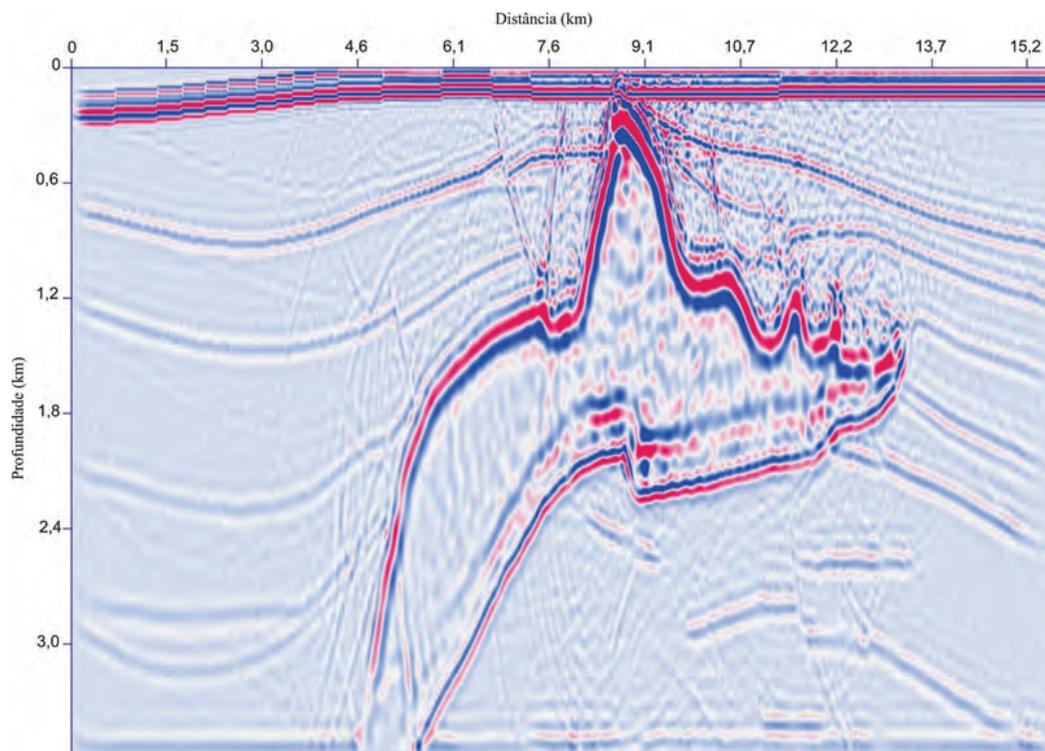


Figura 11 – Resultado da RTM usando o REM com 8 termos para os dados do modelo-1 SEG-EAGE amostrados em 8 ms.



**Figura 12** – Resultado da RTM usando FD com 3 termos para os dados do modelo-1 SEG-EAGE reamostrados em 2 ms.



**Figura 13** – Resultado da RTM usando FD com 5 termos para os dados do modelo-1 SEG-EAGE reamostrados em 4 ms.

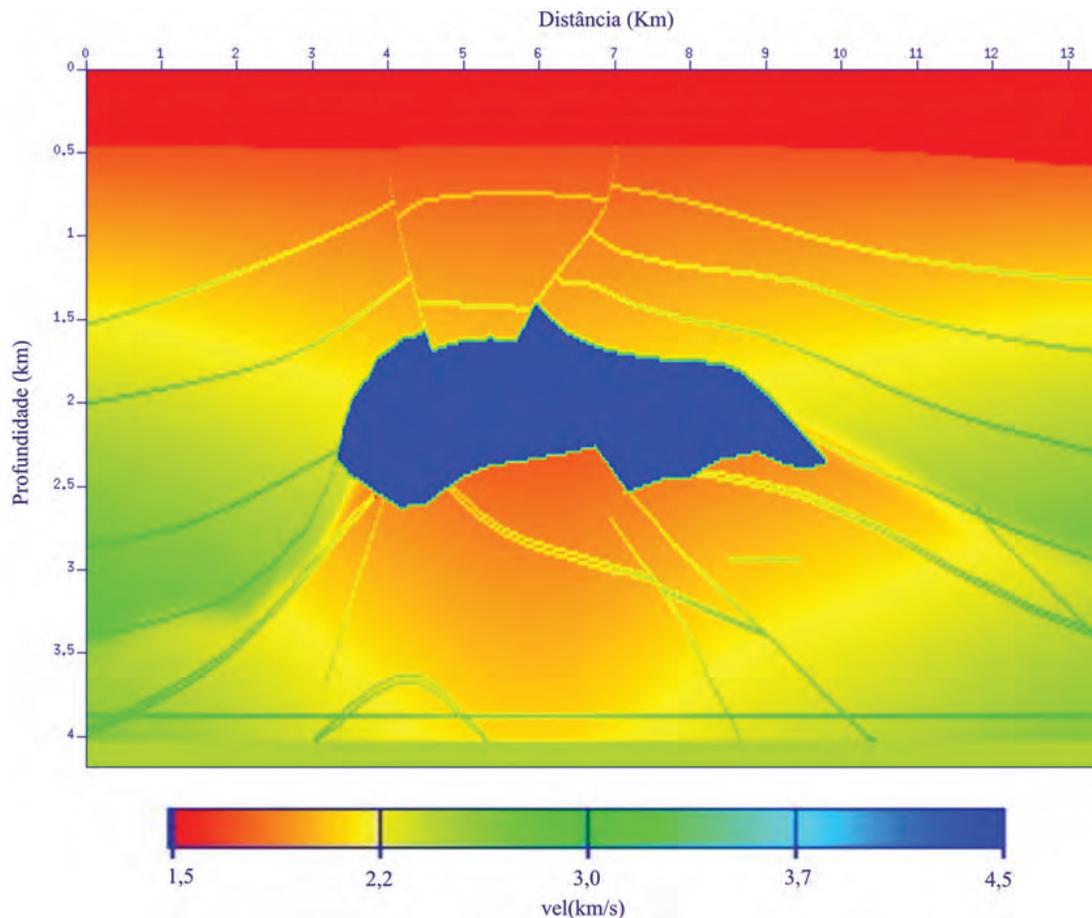


Figura 14 – Campo de velocidade do modelo-2 SEG-EAGE.

de uma mesma linha. O intervalo de amostragem desses dados é de 8 ms com 626 amostras e o campo de velocidade intervalar possui uma malha de 675 pontos na direção horizontal por 210 pontos na vertical, com espaçamento de 20 m em ambas as direções.

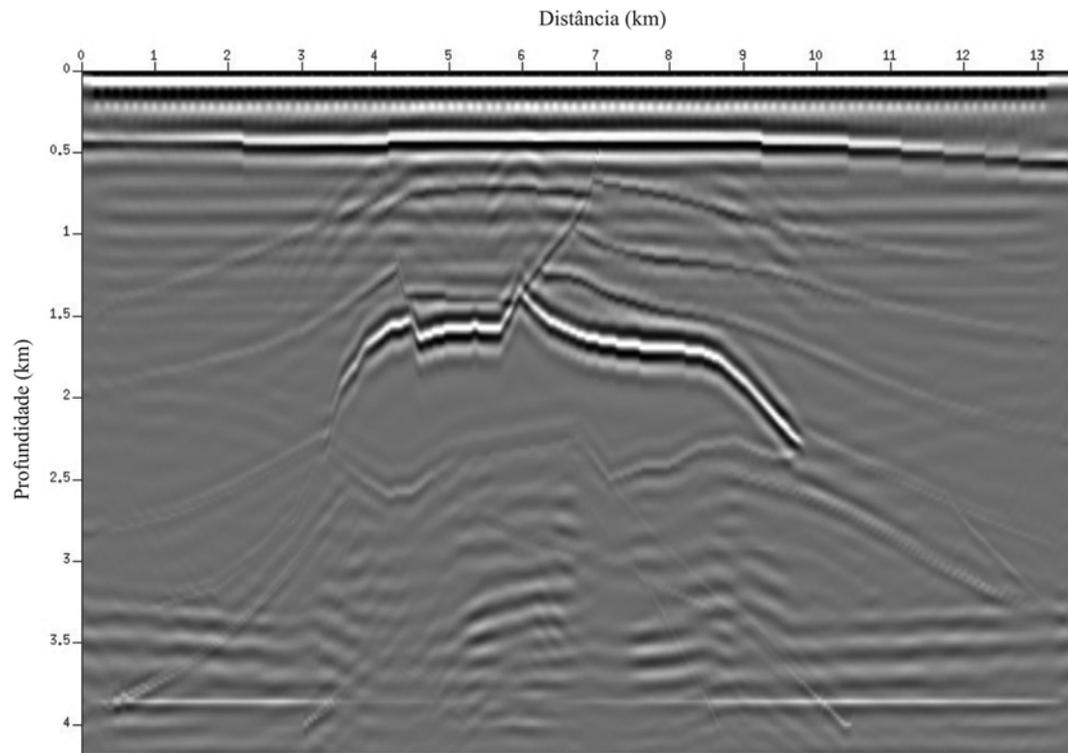
As porções do modelo que merecem especial atenção na avaliação dos métodos de migração são: os contornos do corpo de sal, as falhas subverticais abaixo da almofada de sal, a estrutura anticlinal com ápice nas coordenadas  $x = 4$  km e  $z = 3,6$  km, o refletor horizontal a 3,8 km de profundidade e uma pequena lente situada na posição  $x = 8,9$  km e  $z = 2,9$  km. Todas essas feições são difíceis de imagear, uma vez que estão situados abaixo do corpo de sal.

Na RTM pré-empilhamento realizada, cada seção de tiro foi migrado separadamente e a migração de todos os tiros foi então somada para gerar a seção migrada final. Usamos uma fonte impulsiva e o método pseudo-espectral foi utilizado para calcular as derivadas espaciais.

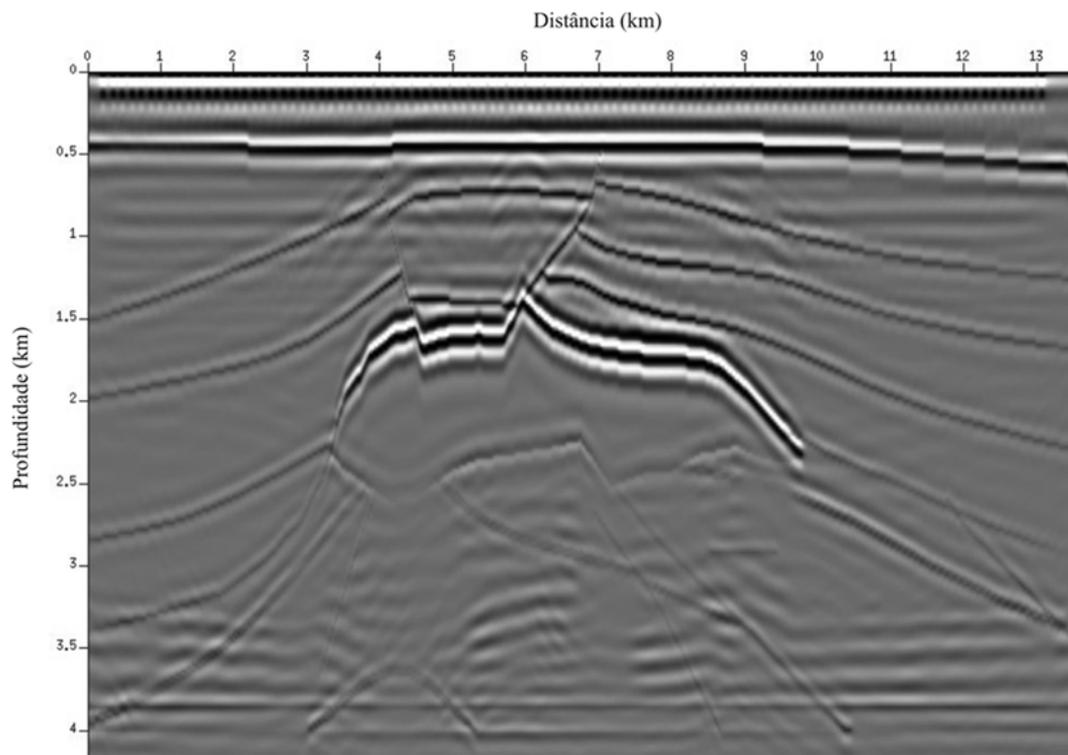
### Discussão dos resultados do modelo-2 SEG-EAGE

Observamos na Figuras 15, 16 e 17, que o REM com 8, 9 e 16 termos conseguiu imagear bem o corpo de sal. No que diz respeito ao anticlinal, o refletor horizontal localizado na profundidade de 4 km e uma pequena lente situada na posição  $z = 2,9$  km e  $x = 8,9$  km, conforme mostra a Figura 14, a RTM usando o REM com 8 termos não conseguiu gerar uma imagem dessas feições geológicas. Além disso, o refletor horizontal que se encontra na profundidade de 3,87 km não aparece de forma contínua (Fig. 15) e algumas falhas não estão com boa definição. Já a RTM com o REM utilizando 9 e 16 termos teve um ótimo desempenho em imagear as feições geológicas. Nas Figuras 18, 19 e 20, temos as imagens ampliadas do corpo de sal e da sua circunvizinhança. As setas na Figura 20 indicam as estruturas geológicas que aparecem na RTM usando o REM com 9 e 16 termos.

O motivo da diferença entre a Figura 15 e as demais é o truncamento feito na expansão de Chebyshev. Quando usamos



**Figura 15** – Resultado da RTM pré-empilhamento usando o REM com 8 termos para os dados do modelo-2 SEG-EAGE amostrados em 8 ms.



**Figura 16** – Resultado da RTM pré-empilhamento usando o REM com 9 termos para os dados do modelo-2 SEG-EAGE amostrados em 8 ms.

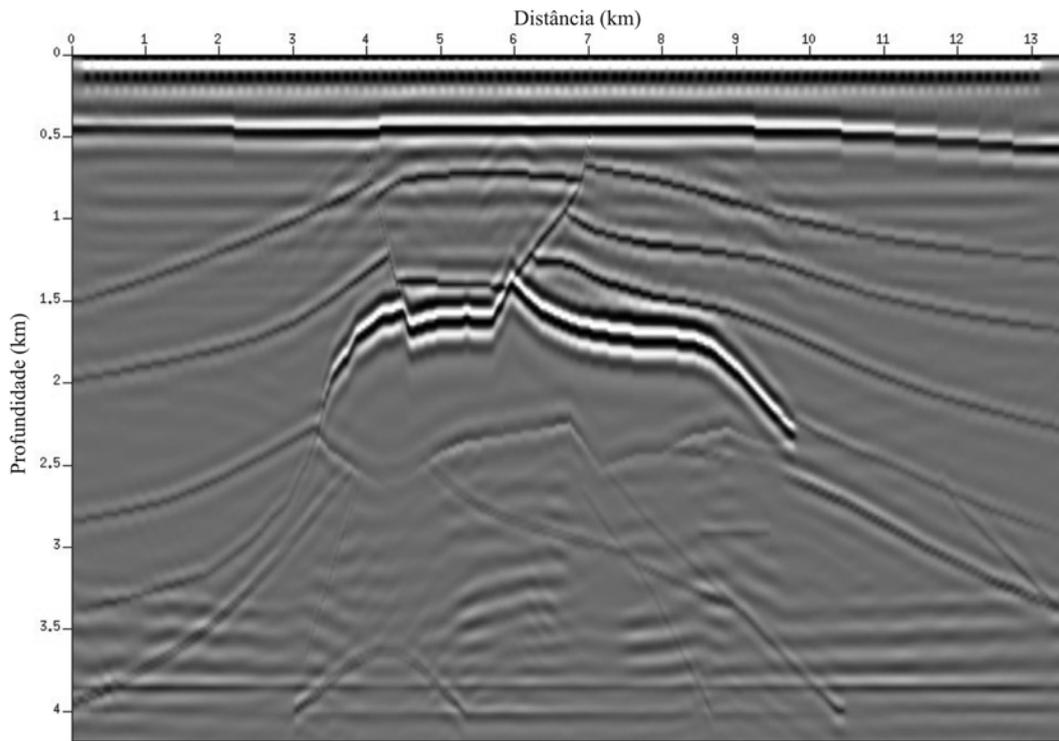


Figura 17 – Resultado da RTM pré-empilhamento usando o REM com 16 termos para os dados do modelo-2 SEG-EAGE amostrados em 8 ms.

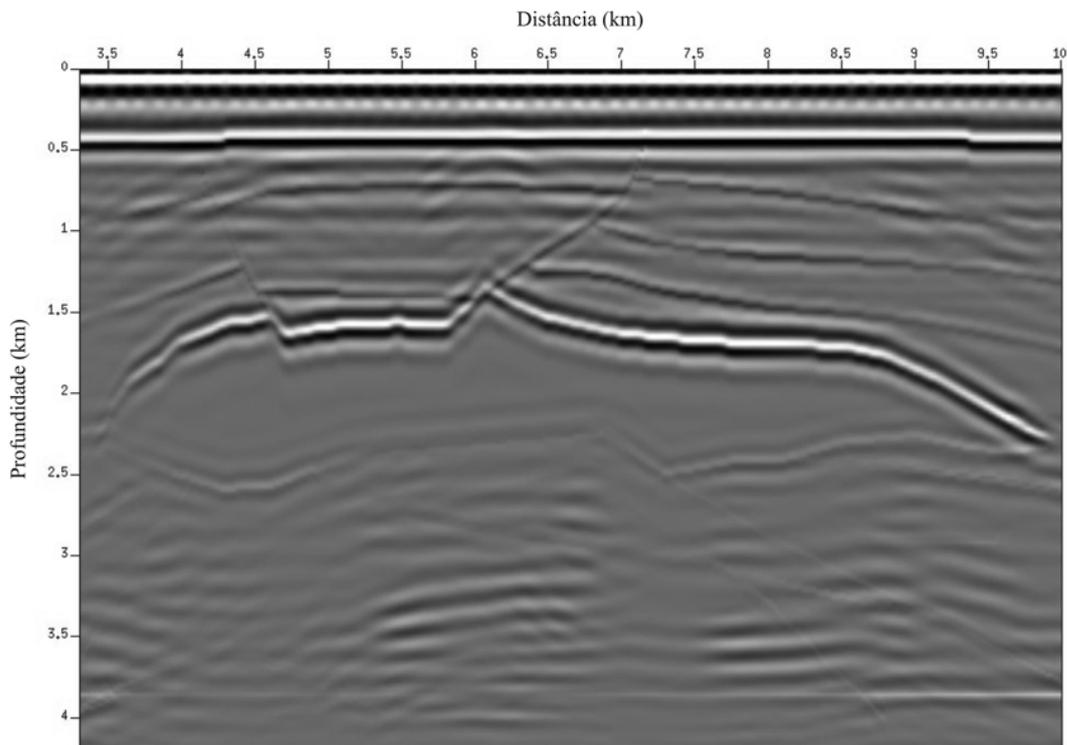


Figura 18 – Ampliação da imagem do corpo de sal e das estruturas abaixo do corpo com 8 termos do REM na RTM.

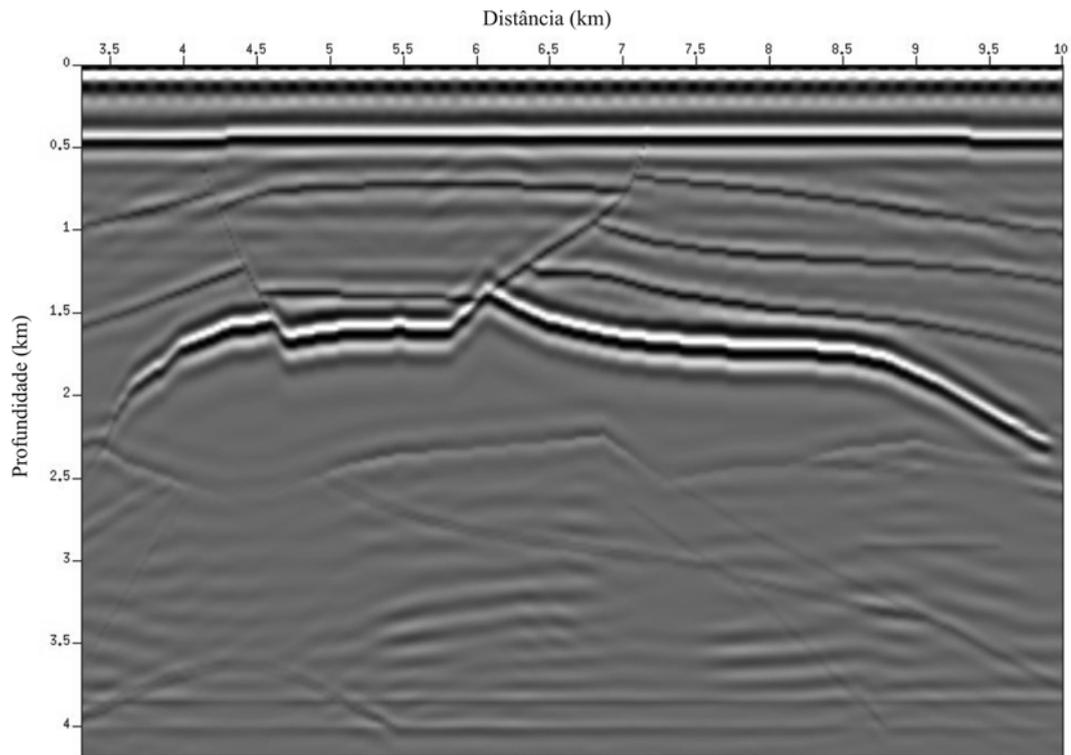


Figura 19 – Ampliação da imagem do corpo de sal e das estruturas abaixo do corpo com 9 termos do REM na RTM.

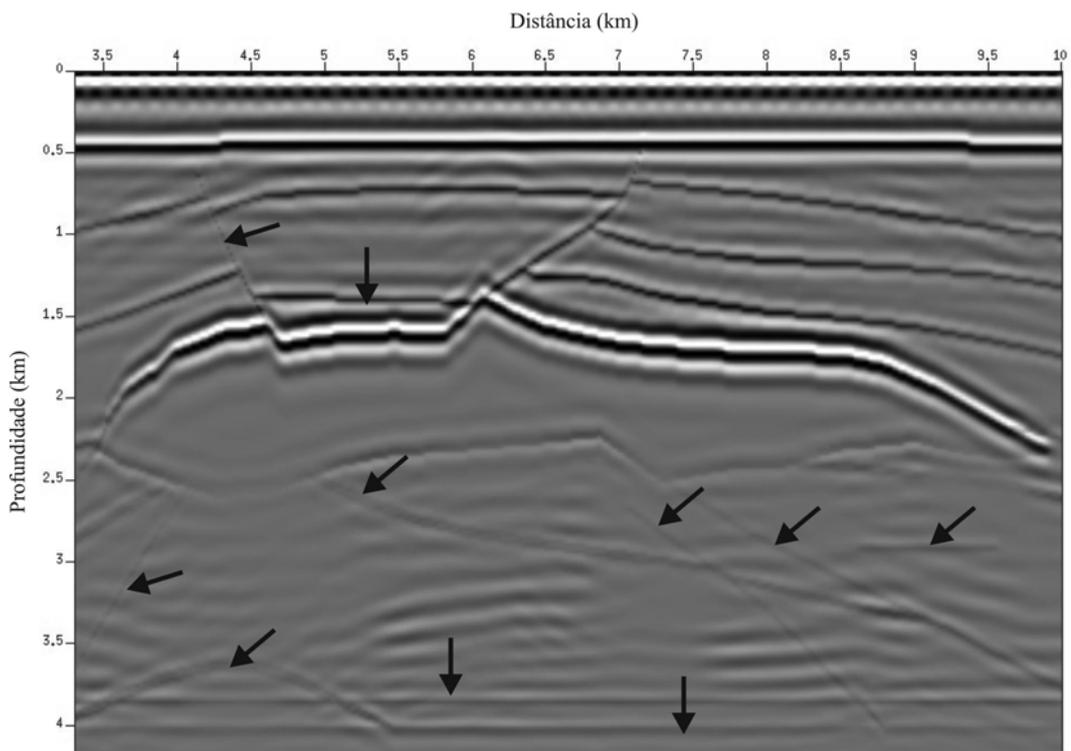


Figura 20 – Ampliação da imagem do corpo de sal e das estruturas abaixo do corpo com 16 termos do REM na RTM.

8 termos da expansão para aproximarmos a função  $\cos(L\Delta t)$ , o erro é  $\epsilon_8 = 0,00014$ , enquanto que usando 9 termos, o erro é  $\epsilon_9 = 0,000008$ . Percebemos assim que a qualidade dos resultados está associada ao menor erro cometido devido ao truncamento da expansão de Chebyshev. O erro é definido como

$$\epsilon = \left| \cos(L\Delta t) - \sum_{\substack{k=0 \\ (k \text{ par})}}^M C_k J_k(z) Q_k(w) \right| e(L\Delta t)$$

é estimado através da expressão  $\Delta t R$ .

Através dos resultados obtidos, percebemos que às vezes a RTM não conseguiu gerar bons resultados quando usamos a quantidade mínima de termos da expansão de Chebyshev, conforme exigido pelo critério de convergência. Vimos também que quando adicionamos mais um termo no REM, obtemos resultados melhores e na medida em que aumentamos o número de termos no REM, as diferenças entre os resultados tornam-se pequenas.

Com base nessa discussão, concluímos que para garantir que o REM tenha um ótimo desempenho na RTM é necessário algum critério adicional na hora de determinarmos o número de termos que serão utilizados. Uma opção é determinar o valor de  $M$  para o qual a magnitude da função de Bessel seja menor do que um certo valor, por exemplo  $|J_M(R\Delta t)| \leq 0,0001$ . Uma outra maneira de determinarmos o número de termos que devemos utilizar é através do cálculo do erro cometido pelo truncamento da expansão. A título de exemplo de como fazer uso do erro, no gráfico da Figura 3 informa que a RTM usando o REM com 3 termos enfrentaria dificuldades ao migrar os dados do modelo-1 SEG-EAGE para  $\Delta t = 2 \text{ ms}$ , conforme pode-se notar na Figura 8. Já na Figura 4, o erro usando o REM com 4 termos é pequeno e este resultado é refletido na excelente imagem migrada (Fig. 9). Por fim, um outro critério adicional que podemos utilizar é o de acrescentarmos 2 termos no REM, além do mínimo exigido para realizarmos RTM.

## CONCLUSÕES

A RTM pós-empilhamento usando o REM e o FD e a RTM pré-empilhamento usando somente o REM tiveram excelentes desempenhos em imagear estruturas geológicas complexas. Isso só foi possível devido aos métodos FD e REM admitirem quaisquer variações de velocidade e pelo fato de usarmos a solução analítica da equação da onda no domínio do tempo.

Diante dos resultados teóricos e numéricos obtidos, podemos também concluir que é mais vantajoso utilizarmos na RTM o REM, combinado com método de Fourier, que resolve as deri-

vadas espaciais, do que fazermos uso do método FD combinado também com o método de Fourier – método pseudo-espectral. Uma vez que o REM permite usar um intervalo de amostragem no tempo maior do que o normalmente utilizado na extrapolação do campo de ondas. Assim, temos uma redução significativa no tempo de processamento, sem perdermos a qualidade e precisão dos resultados.

Nos dados sintéticos de afastamento nulo do modelo-1 SEG-EAGE onde a frequência máxima é de 45 Hz e com intervalo de amostragem temporal de 8 ms, verificamos sem alterar o espectro de frequência do dado, que para diferentes amostragens no tempo ( $\Delta t < 8 \text{ ms}$ ), os métodos FD e REM na extrapolação do campo de ondas fornecem aproximadamente os mesmos resultados, sendo que cada método obedece às suas próprias condições de convergência.

Os resultados e as discussões apresentados, nos permitem concluir que deve-se usar algum critério adicional para determinarmos o número de termos que serão usados pelo REM na RTM, uma vez que o número mínimo de termos, determinado pela condição de convergência, às vezes não foi suficiente para termos bons resultados na RTM. O critério adicional propicia uma redução no custo computacional, pois a quantidade de laplacianos calculados para se realizar a extrapolação do campo de ondas é reduzido. Neste trabalho apresentamos três critérios adicionais. Um critério utiliza a magnitude das funções de Bessel, o outro faz uso do erro cometido pelo truncamento da expansão rápida e o último critério apresentado se baseia na utilização de mais 2 termos além do mínimo exigido. Este último critério é mais prático e apresentou resultados satisfatórios, assim como os demais.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CPGG/UFBA pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho e ao CNPq pelo suporte, através de bolsa de mestrado. E também aos revisores da RBGf deste artigo pelos valiosos comentários e sugestões.

## REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ M & STEGUN IA. 1965. Handbook of mathematical functions. Dover Publications, New York. 1066 p.
- ARAÚJO ES. 2009. Análise dos métodos de diferenças finitas e expansão rápida na migração reversa no tempo. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil. 109 p.
- DABLAIN M. 1985. The application of high-order differencing to the scalar wave equation. Geophysics, 51: 54–56.

- ETGEN JT. 1986. High-order finite-difference reverse time migration with the 2-way non-reflecting wave equation. *SEP-48*: 133–146.
- KOSLOFF D, FILHO AQ, TESSMER E & BEHLE A. 1989. Numerical solution of the acoustic and elastic wave equation by new rapid expansion method. *Geoph. Prosp.*, 37: 383–394.
- SOUBARAS R & ZHANG Y. 2008. Two-step explicit marching method for reverse time migration. In: 70<sup>th</sup> EAGE Conference and Exhibition, Rome/Italy, EAGE. CD-ROM.
- TAL-EZER H. 1986. Spectral methods in time for hyperbolic problems. Society of Industrial and Applied Mathematics. *Journal on Numerical Analysis*, 23: 11–20.
- TAL-EZER H, KOSLOFF D & KOREN Z. 1987. An accurate scheme for seismic forward modelling. *Geoph. Prosp.*, 35: 479–490.

## NOTAS SOBRE OS AUTORES

**Edvaldo Suzarthe de Araujo** é graduado em Física (UFBA/2007), mestre em Geofísica (UFBA/2009) e atualmente é aluno do curso de Doutorado em Geofísica da Universidade Federal da Bahia. As suas principais áreas de interesse são modelagem e processamento de dados sísmicos com ênfase em migração de dados sísmicos. Trabalhou no Departamento de Física da Terra e do Meio Ambiente do Instituto de Física da UFBA como Professor Substituto (2008-2010).

**Reynam da Cruz Pestana** é graduado em Física (UFBA/1983) e Doutor em Geofísica (UFBA/1988). Pós-doutorado em Geofísica no Instituto de Geofísica da Universidade de Karlsruhe (Alemanha), 1989-1991, e de 1998-1999 no Instituto de Geofísica da Universidade do Texas em Austin. De 1988 até o presente é Pesquisador do CPGG/UFBA, atuando no Grupo de Geofísica de Exploração de Petróleo. Desde 2008 é Professor Associado II do Departamento de Física da Terra e do Meio Ambiente do Instituto de Física e da Pós-graduação em Geofísica da UFBA. Tem atuado no desenvolvimento de métodos e algoritmos de processamento e imageamento sísmicos. Mais recentemente suas pesquisas envolvem técnicas de migração de dados sísmicos decompostos em ondas planas e migração reversa no tempo (RTM). É membro da SBGf e da SEG.