Validação da acurácia e medição da dispersão numérica do modelador acústico-vetorial 2D do MADAGASCAR utilizando diferenças finitas em staggered-grid no domínio do tempo com uso de dados semi-analíticos.

Lucas K. F. Queiroz, Daniel L. Macedo, UFPA, Brazil.

Copyright 2024, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica.

Este texto foi preparado para a apresentação no X Simpósio Brasileiro de Geofísica, Salvador, 8 a 10 de outubro de 2024. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do X SimBGf, mas não necessariamente representa a opinião da SBGf ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGf.

Resumo

Seismic numerical modeling, vital in resource exploration, often utilizes finite difference methods for simulation wave propagation. we assess MADAGASCAR's 2D vector-acoustic modeler's accuracy by conducting two experiments: (i) comparing modeled and semi-analytical data, and (ii) cross-correlation between modeled and semi-analytical data for measurement of the numerical dispersion.

Introdução

A modelagem numérica aplicada a sísmica desempenha um papel fundamental na exploração de recursos naturais. Devido à sua versatilidade e acurácia a técnica de diferenças finitas é dominante dentro da modelagem sísmica. Na técnica de diferenças finitas são possíveis diferentes esquemas de discretização com diferentes ordens de acurácia. Portanto, é crucial determinar se o esquema de discretização escolhido é capaz de reproduzir com precisão os fenômenos físicos reais, como demonstrado por Costa et al. (2019). Ao conduzir tal teste de acurácia, é possível identificar eventuais erros numéricos ou de implementação, definir limites de validade das aproximações e, além disso, obter possíveis *insights* valiosos para aprimoramentos futuros.

Neste estudo, conduzimos uma análise para avaliar a precisão do modelador acústico-vetorial 2D disponível no pacote MADAGASCAR[1]: `sfawefd2d_fo`. O objetivo central é obter uma compreensão da exatidão do código de modelagem utilizado no referido modelador. Para tanto, realizamos um estudo prévio dos fundamentos teóricos da equação da onda acústica 2D (Wapenaar, 2014), da teoria sobre função de Green (Snieder, 1994), e exploramos o método de diferenças finitas (Fichtner, 2010). Paralelamente, analisamos o código fonte do modelador `sfawefd2d_fo`, visando compreender sua implementação e funcionamento.

Dois experimentos foram feitos: (i) Comparação do traço modelado com o traço semi-analítico; e (ii) Determinação da defasagem entre dado modelado e semi-analítico por para comparação da dispersão numérica medida e prevista.

[1]MADAGASCAR é um pacote de softwares open-source utilizado para análise de dados multidimensionais e realização de experimentos computacionais reproduzíveis (MADAGASCAR, 2024).

Base Teórica

O modelador utilizado é baseado no sistema de equações da onda acústico-vetorial de 1ª ordem para um meio isotrópico:

$$\frac{1}{K(x,z)}\frac{\partial p}{\partial t}(x,z,t)+\nabla\cdot\vec{v}(x,z,t) = q(x,z,t), \quad (1)$$

$$\rho(x,z)\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(x,z,t)+\nabla p(x,z,t) = \vec{f}(x,z,t), \quad (2)$$

nas quais, $p(x,z,t)$ é o campo de pressão, $\vec{v}(x,z,t)$ é o campo de velocidade, $\rho(x,z)$ é a densidade do meio, $K(x,z)$ é o módulo de incompressibilidade, $q(x,z,t)$ é a fonte monopolar dada pela taxa de densidade volumétrica de injeção de volume, e $\vec{f}(x,z,t)$ é a fonte dipolar dada pela densidade de volume de forças externas.

Para se obter a função de green do sistema de eqs. (1) e (2) para uma fonte monopolar, $\mathscr{G}(\vec{r},t)$, fazemos $q(\vec{r},t)=\delta(\vec{r})\delta(t)$ e $\vec{f}(\vec{r},t)=\vec{0}$. Para este caso, podemos achar a relação entre a função de Green do sistema acústico-vetorial, $\mathscr{G}(\vec{r},t)$ e aquela da equação acústica da onda de 2ª ordem, $G(\vec{r},t)$:

$$\mathscr{G}(\vec{r},t)=-\rho\frac{\partial G}{\partial t}(\vec{r},t). \quad (3)$$

Para o caso 2D e um meio homogêneo a função de green $G(\vec{r},t)=G(r,t)$ é conhecida (Snieder, 1994):

$$G^{2D}(r,t)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad t<r/c, \\ \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2/c^2}} & \text{para} \quad t>r/c, \end{cases} \quad (4)$$

O método de diferenças finitas transforma as equações diferenciais em sistemas algébricos substituindo as derivadas das equações diferenciais por relações algébricas de diferenças (LeVeque, 1998). No modelador utilizado, aplica-se a estratégia do staggered-grid, que consiste em grids retangulares deslocados (Fig.1), oferecendo maior precisão e estabilidade em comparação ao grid normal (Liu & Sen, 2009). Usando-se uma aproximação de quarta ordem para derivadas espaciais e de segunda ordem para as derivadas temporais (Fornberg, 1988) chegamos nas evoluções no tempo dos campos de velocidade na direção z – na direção x temos expressão análoga onde o campo é calculado na posição referente aos índices $\left(i-\frac{1}{2},j\right)$ –

$$V^{l+\frac{1}{2}}_{z_{i,j-\frac{1}{2}}} \approx V^{l-\frac{1}{2}}_{z_{i,j-\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta t}{\rho_{z_{i,j-\frac{1}{2}}}\Delta h}\left\{\frac{9}{8}\left[P^l_{i,j}-P^l_{i,j-1}\right] - \frac{1}{24}\left[P^l_{i,j+1}-P^l_{i,j-2}\right]\right\} + \frac{\Delta t\, f^l_{z_{i,j-\frac{1}{2}}}}{\rho_{z_{i,j-\frac{1}{2}}}}, \quad (5)$$

além daquela do campo de pressão

$$P_{i,j}^{l+1} \approx P_{i,j}^{l} - \frac{\Delta t K_{i,j}}{\Delta h}\left\{\frac{9}{8}\left[V_{x_{i+\frac{1}{2},j}}^{l+\frac{1}{2}} - V_{x_{i-\frac{1}{2},j}}^{l+\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{24}\left[V_{x_{i+\frac{3}{2},j}}^{l+\frac{1}{2}} - V_{x_{i-\frac{3}{2},j}}^{l+\frac{1}{2}}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{9}{8}\left[V_{z_{i,j+\frac{1}{2}}}^{l+\frac{1}{2}} - V_{z_{i,j-\frac{1}{2}}}^{l+\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{24}\left[V_{z_{i,j+\frac{3}{2}}}^{l+\frac{1}{2}} - V_{z_{i,j-\frac{3}{2}}}^{l+\frac{1}{2}}\right]\right\} + \Delta t\, K_{i,j}\, q_{i,j}^{l+\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

nas quais $P_{i,j}^{l} = p(x_i, z_j, t_l)$, $V_{z_{i,j}}^{l} = v_x(x_i, z_j, t_l)$, $\rho_{z_{i,j-\frac{1}{2}}} = [\rho(x_i, z_j) + \rho(x_i, z_{j-1})]/2$ e $x_i = x_0 + i\Delta x$, $z_j = z_0 + j\Delta z$ e $t_l = t_0 + l\Delta t$.

Note que em todas as evoluções de campo, tanto de pressão quanto de velocidade, foi considerado grid equiespaçado, ou seja, $\Delta x = \Delta z = \Delta h$. Importante notar, também, que os campos de velocidade são atualizados nos instantes múltiplos semi-inteiros de Δt enquanto o campo de pressão é atualizado para os múltiplos inteiros.

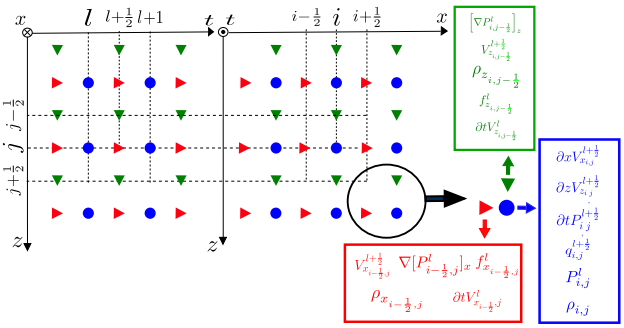


Figura 1 – Esquema de célula staggered-grid usado no modelador `sfawefd2d_fo` *evidenciando em que ponto no espaço e tempo cada uma das grandezas das equações serão calculadas.*

Relação de dispersão

Podemos usar a eq. (5) e sua análoga para substituir as diferenças entre as velocidades na equação (6) obetendo assim uma evolução do campo de pressão que só depende de pressões no tempo anterior.

$$\frac{\rho}{\Delta t^2 K}\left[P_{i,j}^{l+\frac{3}{2}} - 2P_{i,j}^{l+\frac{1}{2}} + P_{i,j}^{l-\frac{1}{2}}\right] =$$
$$\frac{9}{8\Delta h^2}\left[\frac{9}{8}\left(P_{i+1,j}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i,j}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i,j}^{l+\frac{1}{2}} + P_{i-1,j}^{l+\frac{1}{2}} + P_{i,j+1}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i,j}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i,j}^{l+\frac{1}{2}} + P_{i,j-1}^{l+\frac{1}{2}}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{24}\left(P_{i+2,j}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i-1,j}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i+1,j}^{l+\frac{1}{2}} + P_{i-2,j}^{l+\frac{1}{2}} + P_{i,j+2}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i,j-1}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i,j+1}^{l+\frac{1}{2}} + P_{i,j-2}^{l+\frac{1}{2}}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{24\Delta h^2}\left[\frac{9}{8}\left(P_{i+2,j}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i+1,j}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i-1,j}^{l+\frac{1}{2}} + P_{i-2,j}^{l+\frac{1}{2}} + P_{i,j+2}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i,j+1}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i,j-1}^{l+\frac{1}{2}} + P_{i,j-2}^{l+\frac{1}{2}}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{24}\left(P_{i+3,j}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i,j}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i,j}^{l+\frac{1}{2}} + P_{i-3,j}^{l+\frac{1}{2}} + P_{i,j+3}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i,j}^{l+\frac{1}{2}} - P_{i,j}^{l+\frac{1}{2}} + P_{i,j-3}^{l+\frac{1}{2}}\right)\right] \quad (7)$$

Agora, considerando a propagação de uma onda plana em um meio homogêneo $P_{i,j}^{l} = e^{i(k_x x_i + k_z z_j - \omega t_l)}$, Podemos chegar as seguintes relações

$$P_{i\pm n,j}^{l+\frac{1}{2}} = e^{-i\omega\frac{\Delta t}{2}} e^{\pm n i k_x \Delta x} P_{i,j}^{l}, \quad n = 1,2,3; \quad (8)$$
$$P_{i,j\pm n}^{l+\frac{1}{2}} = e^{-i\omega\frac{\Delta t}{2}} e^{\pm n i k_z \Delta z} P_{i,j}^{l}, \quad n = 1,2,3; \quad (9)$$
$$P_{i,j}^{l+\frac{1}{2}\pm 1} = e^{-i\omega\frac{\Delta t}{2}} e^{\mp i\omega\Delta t} P_{i,j}^{l}. \quad (10)$$

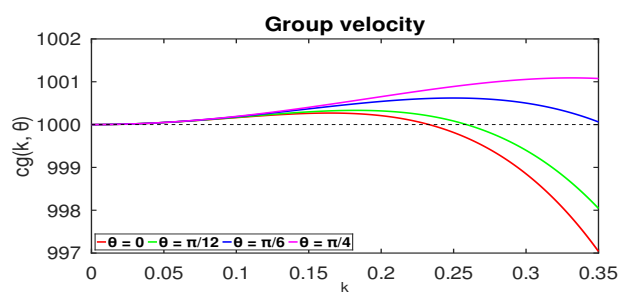
Então substituindo as eqs (8) até (10) em (7), e expressando cossenos através de exponenciais complexas, podemos chegar em uma equação para $\omega(k,\theta)$. Considere que $k = \frac{\omega}{c}$ é o número de onda, a partir do qual definimos $k_x = k\sin\theta$ e $k_z = k\cos\theta$, onde $-\pi < \theta < \pi$ é a direção de propagação da onda plana em relação ao o eixo vertical (note a definição de ξ ao final):

$$\omega(k,\theta) = \frac{1}{\Delta t}\cos^{-1}\left\{\frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta h^2}\left\{\frac{9}{8}\left[\frac{9}{8}\left(\cos(k\sin\theta\Delta h) + \cos(k\cos\theta\Delta h) - 2\right)\right.\right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{24}\left(\cos(2k\sin\theta\Delta h) - \cos(k\sin\theta\Delta h) + \cos(2k\cos\theta\Delta h) - \cos(k\cos\theta\Delta h)\right)\right]$$
$$- \frac{1}{24}\left[\frac{9}{8}\left(\cos(2k\sin\theta\Delta h) - \cos(k\sin\theta\Delta h) + \cos(2k\cos\theta\Delta h) - \cos(k\cos\theta\Delta h)\right)\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{1}{24}\left(\cos(3k\sin\theta\Delta h) + \cos(3k\cos\theta\Delta h) - 2\right)\right]\right\} + 1\right\} = \frac{1}{\Delta t}\cos^{-1}\{\xi\}. \quad (11)$$

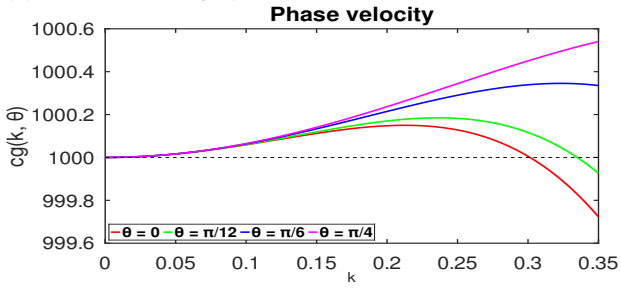
De onde podemos tirar as velocidades de fase, $C_p(k,\theta)$, e grupo, $C_g(k,\theta)$, ambas representadas na Figura 2.

$$C_p(k,\theta) = \frac{1}{k\Delta t}\{\xi\}, \quad (12)$$

$$C_g(k,\theta) = \left(1 - \{\xi\}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left\{\frac{c^2\Delta t}{\Delta h}\left[\frac{81}{64}\left(\sin(k\sin\theta\Delta h)\sin\theta + \sin(k\cos\theta\Delta h)\cos\theta\right)\right.\right.$$
$$- \frac{9}{96}\left(\sin(2k\sin\theta\Delta h)2\sin\theta - \sin(k\sin\theta\Delta h)\sin\theta + \sin(2k\cos\theta\Delta h)2\cos\theta\right.$$
$$\left.\left.\left. - \sin(k\cos\theta\Delta h)\cos\theta\right) + \frac{1}{576}\left(\sin(3k\sin\theta\Delta h)3\sin\theta + \sin(3k\cos\theta\Delta h)3\cos\theta\right)\right]\right\} \quad (13)$$



(a) Velocidade de grupo.



(b) Velocidade de fase.

Figura 2 – Velocidade de grupo e fase do modelador para diferentes direções de propagação θ.

Metodologia

Neste estudo, realizamos dois experimentos distintos para avaliar a precisão do modelador em questão.

Experimento 1 - Comparação do dado modelado e semi-analítico

Para validar se um modelador está corretamente simulando a equação desejada, uma abordagem comum é comparar os traços modelados por ele com traços analíticos. Para uma fonte monopolar pontual $q(\vec{r},t) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_s)s(t)$, na qual $\vec{r}_s$ é a posição da fonte e $s(t)$ sua assinatura, o campo de pressão pode ser calculado pela convolução no tempo abaixo

$$p(\vec{r},t) = \mathscr{G}(\vec{r},t) * s(t) = -\rho \frac{\partial G}{\partial t}(\vec{r},t) * s(t) = -\rho G(\vec{r},t) * \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{14}$$

Para o caso 2D com meio homogêneo, G é dada pela eq. (4). Para obter o que chamamos de traço semi-analítico (aproximação numérica para o traço analítico) fizemos a convolução numérica entre a função de Green amostrada, G^{2D}, e a derivada numérica da fonte usada no experimento que gerou um traço modelado (vide descrição dos parâmetros do experimento mais adiante). Fizemos, então, a comparação entre os dado modelados e semi-análiticos para diferentes frequências e para diferentes discretizações para o espaço e tempo.

Experimento 2 - Determinação da defasagem entre dado modelado e semi-analítico

Usamos a correlação-cruzada entre os dados modelado e semi-analítico, para determinar a defasagem entre eles, δt. Esta defasagem nos permite calcular a velocidade de grupo numérica medida, $c_{g_{mod}}$, em função da velocidade propagação teórica, c,:

$$\delta t = \tau - \tau_{mod} = \frac{r}{c} - \frac{r}{c_{g_{mod}}} \implies c_{g_{mod}} = \frac{rc}{r - c\delta t}, \tag{15}$$

na qual τ é o tempo de trânsito teórico, τ_{mod} é o tempo de trânsito experimental e r é a distância fonte-receptor. A velocidade de grupo numérica medida, $c_{g_{mod}}$, será comparada com a velocidade de grupo numérica teórica, c_g, dada pela eq. (13) e vista na Figura 2a para diferentes frequências.

Para os experimentos acima, foi construído um modelo de $2400m$ de largura e $1300m$ de profundidade, com densidade constante de $1200kg/m^3$ e velocidade constante de $1000m/s$. A aquisição consiste em um par fonte-receptor espaçados de $1200.2m$, na horizontal. Foram feitos experimentos usando como fontes 4 sinais Ricker de frequências diferentes ($5, 10, 20$ e $45Hz$) e duas discretizações diferentes ($\Delta h = 2m, \Delta t = 0.0004s$ e $\Delta h = 1m, \Delta t = 0.0001s$).

Resultados e discussão

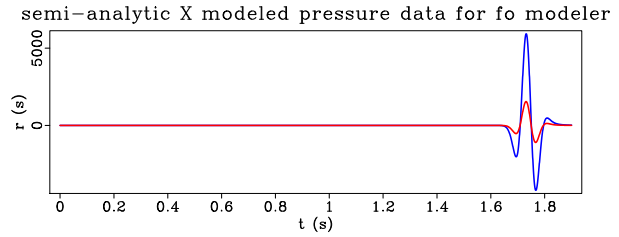
Antes de apresentar os resultados dos experimentos, é importante destacar uma descoberta no código fonte do modelador `sfawefd2d_fo`. Foi identificado um erro no cálculo de injeção dos termos de fonte nas equações, causando uma disparidade significativa entre os dados modelados e os dados analíticos (Fig. 3a). O termo injetado da fonte monopolar, de acordo com a eq. (6), deveria ser

$$\Delta t\, K_{i,j}\, q_{i,j}^{l+\frac{1}{2}}$$

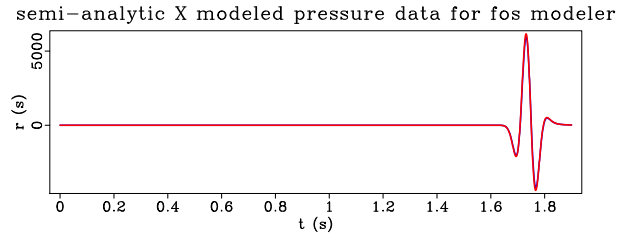
mas estava como

$$\frac{\Delta t\, K_{i,j}\, q_{i,j}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}.$$

Após corrigir esse cálculo, os dados modelados passaram a se aproximar mais dos dados semi-analíticos (Fig. 3b). Portanto, os experimentos deste estudo foram realizados utilizando o código com essas correções na injeção da fonte[2] (`sfawefd2d_fos`).



(a) Modelador `sfawefd2d_fo`.



(b) Modelador `sfawefd2d_fos`.

Figura 3 – Comparação entre o traço modelado, em azul, e semi-analítico, em vermelho, para o modelador antes e depois da correção do termo de injeção da fonte. Frequência da fonte: $10Hz$. Discretização: $\Delta h = 2\ m, \Delta t = 0.0004\ s$.

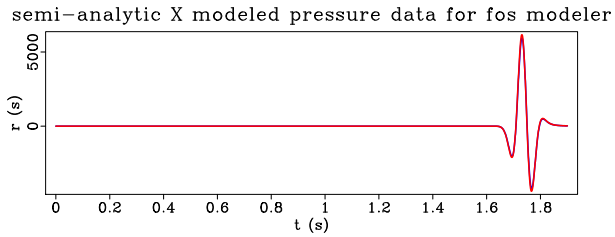
A Figura 4a apresenta a comparação entre os traços modelado (em azul) e o semi-analítico (em vermelho) e Figura 4b ilustra o erro relativo tomando como referência o valor máximo do traço semi-analítico. Este último foi obtido, de acordo com a eq. (14), por meio da convolução discreta da função de Green acústica com a derivada numérica no tempo da *wavelet* e posteriormente multiplicados por Δt, por $\Delta x \Delta z$, e, finalmente, pela densidade ρ. A primeira ponderação faz com que a convolução discreta no tempo se aproxime da contínua. A segunda ponderação está ligada ao fato que a injeção em um ponto do grid não corresponde a uma fonte pontual mas a uma que ocupa um retângulo de área $\Delta x \Delta z$.

Analisando os resultados mostrados na Figura 4 vemos, antes de mais nada, que o erro possui uma forma de onda sugere uma defasagem entre os traços modelados

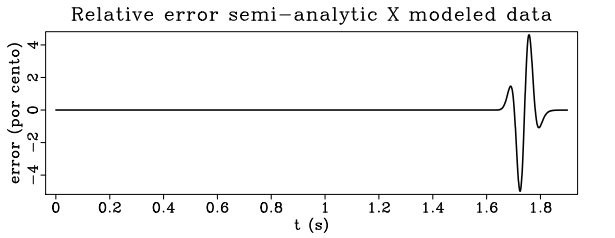
[2] Também foi observado erro análogo na injeção da fonte dipolar que também foi corrigido.

e semi-analítico. Esta questão pode ser explicada devido a dispersão numérica que faz com que a velocidade de grupo, c_g, dependa da frequência e não seja igual a velocidade de propagação teórica c. Esta questão será melhor estudada no experimento seguinte.

Além disso, vê-se também na Figura 4 que o erro relativo chega na ordem de 4%. Foram levantadas 3 hipóteses que podem estar ligados a existência deste fator: (i) erro numérico no cálculo do traço semi-analítico introduzido devido à dificuldade de se amostrar a função de Green G – eq. 4 – que possui uma descontinuidade; (ii) tamanho da discretização do espaço e do tempo que influência o número de pontos do grid por comprimento de onda do sinal propagado; e, por fim, (iii) Frequência da fonte que acaba, do mesmo modo, por influenciar o número de pontos do grid por comprimento de onda. A seguir, analisamos a validade dessas 3 hipóteses.



(a) Comparação

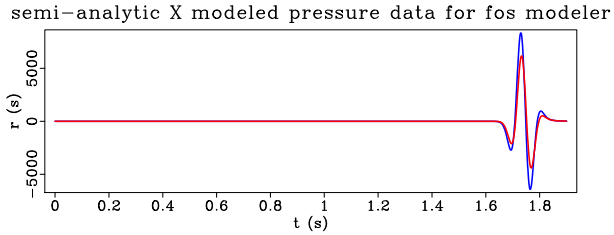


(b) Erro relativo

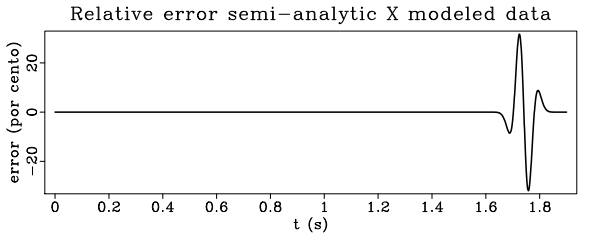
Figura 4 – Experimento 1. Comparação e erro relativo entre o traço modelado e o traço semi-analítico. Frequência da fonte: $10Hz$. Discretização: $\Delta h = 2\ m, \Delta t = 0.0004\ s$.

A descontinuidade da Função de Green G^{2D} acontece no instante que corresponde ao tempo de trânsito $\tau = \frac{r}{c}$ entre fonte e receptor. A distância entre esses dois foi escolhida de tal forma que esta descontinuidade fosse um múltiplo semi-inteiro de Δt. Se, porém, escolhermos um distância tal que o tempo de trânsito se aproxime[3] de um múltiplo de Δt vê-se que a correspondência entre traço modelado e o semi-analítico se deteriora resultando em um aumento significativo do erro relativo (Figura 5). Isso se dá devido a amostras perto da descontinuidade com valores extremamente altos que faz com que a convolução discreta se afaste, enquanto aproximação, da sua correpondente convolução contínua.

[3]O Tempo de trânsito τ entre fonte e receptor não pode ser um múltiplo exato de Δt pois, ao se amostrar a Função de Green aconteceriam indefinições númericas (`nan`).



(a) Comparação. traço modelado em azul e traço semi-analítico em vermelho



(b) Erro relativo

Figura 5 – Experimento 1. Comparação e erro relativo entre o traço modelado e o traço semi-analítico com a descontinuidade da função de Green próxima a um múltiplo inteiro de Δt. Frequência da fonte: $10Hz$. Discretização: $\Delta h = 2\ m, \Delta t = 0.0004\ s$.

Observamos que diminuir o espaçamento do grid de $2m$ para $1m$ e o intervalo de tempo de $0.0004s$ para $0.0001s$ melhora significativamente a concordância entre o traço modelado e o semi-analítico. Isso é evidenciado pela redução do erro relativo, mostrado na Figura 6. Essa melhoria está de acordo com a teoria do método de diferenças finitas, que sugere que um grid mais refinado proporciona uma melhor aproximação das derivadas.

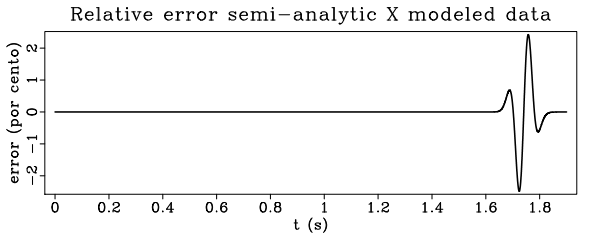
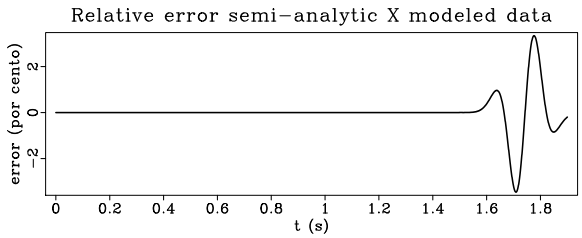


Figura 6 – Experimento 1. Erro relativo entre o traço modelado e semi-analítico para um espaçamento de grid menor. Frequência da fonte: $10Hz$. Discretização: $\Delta h = 1m, \Delta t = 0.0001\ s$.

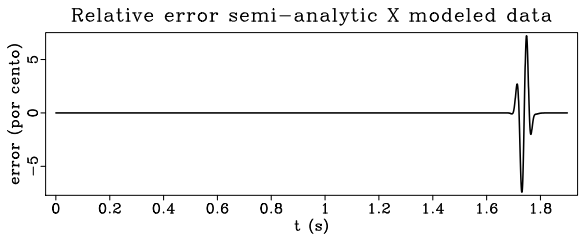
A Figura 7 mostra os erros relativos para a comparação entre o traço modelado e semi-analítico para 3 frequências diferentes. Ao realizar tal hipotese vemos que diminuir a frequência central da fonte para $5Hz$ tem o mesmo efeito que diminuir o espaçamento do grid, evidenciado ao compararmos o erro relativo para um grid menor e o mostrado na Figura 7a, isto porque as duas abordagens estão fazendo a mesma coisa que é amostrar mais pontos

do grid por comprimento de onda, uma por aumentar a quantidade de pontos deixando fixo o comprimento de onda e outra por deixar fixo a quantidade de pontos e aumentar o comprimento de onda cobrindo assim um espaço com mais pontos.

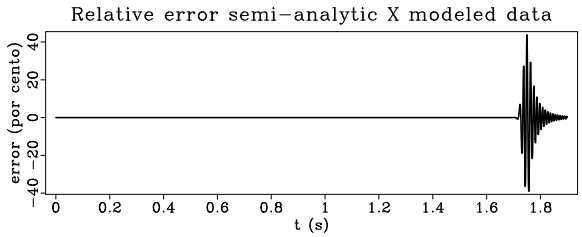
O aumento da frequência central da fonte, Figura 7b e 7c, tem o efeito contrário, amostrando cada vez menos pontos por comprimento de onda o que faz o erro realativo ser maior se comparado com a frequêcnia inicial de $10Hz$ (Figura 4b). Em espacial note que o erro para a frequência de $45Hz$ (Figura 7c) é o maior de todos, o que, como vimos, já era de se esperar. Contudo há ainda um outro elemento que é a degradação da forma de onda da fonte devido a dispersão númerica, ou seja, as velocidades de grupo e de fase dependem da frequência e diferem da velocidade teórica (ver Figura 2).



(a) Frequência central: $5Hz$.



(b) Frequência central: $20Hz$.



(c) Frequência central: $45Hz$.

Figura 7 – Experimento 1. Erros realtivos entre os traços modelados e semi-analíticos para 3 frequências centrais da fonte. Discretização: $\Delta h = 2\ m, \Delta t = 0.0004\ s$.

A Figura 8 mostra a correlação-cruzada entre os traços modelado e o semi-analítico para 4 frequências diferentes. Se a velocidade de grupo númérica não dependesse da frequência esta correlação-cruzada teria seu pico no tempo zero, i.e., no *time lag* nulo. Podemos, portanto, medir a defasagem entre os traços modelado e semi-analítico, δt, vendo em que posição do eixo do tempo está o pico dos gráficos, para as Figuras 8a até 8c. Importante notar que identificamos uma outra discrepância no modelador (Tanto em `sfawefd2d_fo` como em `sfawefd2d_fos`) ao se gravar os campos: a primeira amostra de cada campo a ser gravada, que corresponderia ao índice $l = 0$, deveria ser nula, que corresponde ao valor de inicialização dos campos. Mas, ao invés disso, a primeira amostra de campo de pressão que é gravada corresponde a $l + 1 = 1$. Isso faz com que todo o traço modelado esteja adiantado de um intervalo de discretização no tempo, Δt. Para as correlações-cruzadas calculadas na Figura 8, essa questão foi corrigida adicionando-se uma amostra nula no início de cada um dos traços modelados. Essa correção também foi feita em todos os traços modelados usados no Experimento 1.

Na Tabela 1 podemos ver as defasagem, δt, a velocidade de grupo numérica medida, $c_{g_{mod}}$, e a velocidade de grupo numérica teórica, c_g para cada uma das frequências vistas nas Figuras 8a até 8c.

Tabela 1 – Comparação entre velocidade de grupo medida, $c_{g_{mod}}$, e velocidade de grupo teórica, c_g.

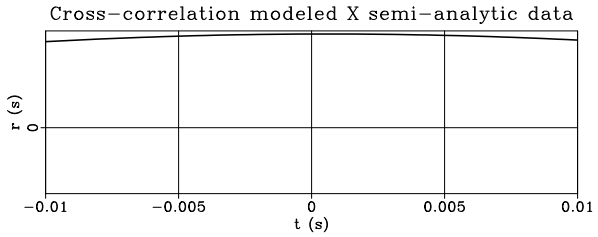
Freq. $[Hz]$	$\delta t\ [s]$	$c_{g_{mod}}\ [m/s]$	$c_g\ [m/s]$
5	$(4 \pm 4) \times 10^{-4}$	1000.33 ± 0.33	1000.02
10	$(4 \pm 4) \times 10^{-4}$	1000.33 ± 0.33	1000.07
20	$(4 \pm 4) \times 10^{-4}$	1000.33 ± 0.33	1000.22
45	$(-8 \pm 4) \times 10^{-4}$	999.33 ± 0.33	999.26

Como a discretização no tempo foi de $\Delta t = 0.0004\ s$, a defasagem δt tem valores múltiplos de Δt. Mas como (i) a localização do pico da correlação caso os sinais contínuos não necessariamente seriam múltiplos de Δt, e (ii) erro numérico no processo de construção do traço semi-analítico, consideramos um erro de $0.0004\ s$ para os valores de δt medidos. Verifica-se que para as duas primeiras frequências os valores da velocidade de grupo teórica, apesar de próximos, não estão dentro da margem de erro das velocidades de grupos medidas. Já para as duas frequências mais altas, os valores teóricos caem dentro da margem de erro dos valores medidos.

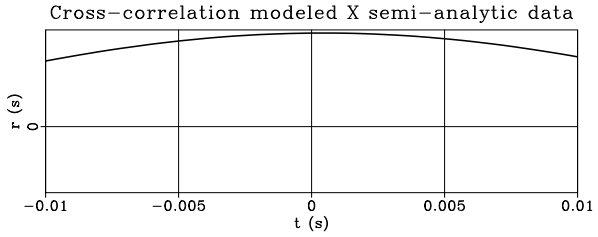
Conclusões

A partir do Experimento 1 podemos dizer que, após a correção da injeção das fontes, e da correção com inclusão da amostra inicial nula nos traços modelados, o modelador em questão apresentou um bom funcionando, apresentado um boa relação entre os traços modelados e semi-analíticos, e com o erro entre eles demonstrando comportamento esperado previsto pela teoria.

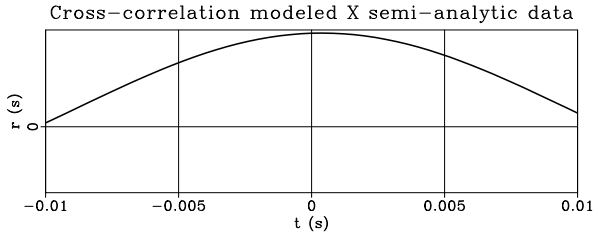
Já o Experimento 2, apesar de mostrar uma certa proximidade da velocidade de grupo numérica medida com aquela teórica, não correspondeu totalmente ao esperado. Refazer o experimento com novos parâmetros ou mesmo projetar outro tipo de experimento que permita medir a velocidade de grupo numérica com mais acurácia sejam necessários.



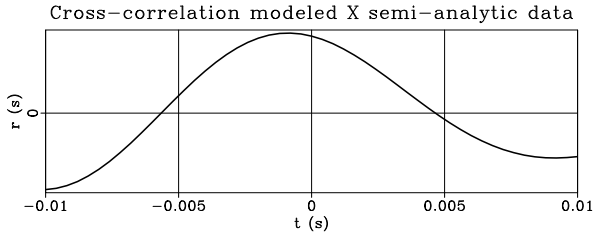
(a) Frequência central: $5Hz$.



(b) Frequência central: $10Hz$.



(c) Frequência central: $20Hz$.



(d) Frequência central: $45Hz$.

Figura 8 – Experimento 2. Correlação-cruzada entre o traço modelado e semi-analítico sendo este último usado com referência para 3 frequêcias diferentes. Discretização: $\Delta h = 2\ m, \Delta t = 0.0004\ s$

Como prosseguimento do trabalho planejamos também desenvolver experimentos que permitam comparar as velocidades de fase numéricas teórica e medida.

Referências

Costa, L. d. C., Pereira, A. G., Hartmann, E. C. & Macedo, D. L., 2019. Teste da acurácia de um modelador acústico 2d por diferenças finitas no domínio do tempo, Expanded abstracts, 16th International Congress of the Brazilian Geophysical Society.

Fichtner, A., 2010. Full seismic waveform modelling and inversion, Springer Science & Business Media.

Fornberg, B., 1988. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids, Mathematics of computation, vol. 51(184): 699–706.

LeVeque, R. J., 1998. Finite difference methods for differential equations, Draft version for use in AMath, vol. 585(6): 112.

Liu, Y. & Sen, M. K., 2009. An implicit staggered-grid finite-difference method for seismic modelling, Geophysical Journal International, vol. 179(1): 459–474.

MADAGASCAR, 2024. Availible on: https://www.reproducibility.org/wiki/main_page, Acess on: april 28th, 2024.

Snieder, R., 1994. A Guided Tour of Mathematical Physics, Samizdat Press.

Wapenaar, C. P. A., 2014. Elastic wave field extrapolation: Redatuming of single-and multi-component seismic data, Elsevier.